7 I selverkendelsens lys

I begyndelsen af det 20. århundrede var der en stærk tiltro til, at alle nødvendige videnskabelige discipliner var blevet etableret med 1800-tallets landvindinger, og at det nu kun gjaldt om at fylde ud i de resterende huller af et stadig mere velbeskrevet og fuldendt naturvidenskabeligt verdensbillede. Den europæiske tænkning og forskning havde ikke blot erobret verdens kontinenter, luften og havet, men var godt på vej til at forstå hele menneskets udviklingshistorie, livets største gåder, tankens sande struktur og materiens inderste hemmeligheder. Det var derfor ikke underligt, at der indfandt sig en vis skråsikkerhed om emner, der rakte ud over de videnskabelige discipliner, hvilket ikke sjældent resulterede i forhastede konklusioner om, hvordan man skulle indrette samfundet.

Et grelt eksempel er Charles Darwins (1809-82) udviklingslære, som meget hurtigt blev tolket til kun at være et spørgsmål om, at man skal være stærk nok til at overleve i en fjendtlig verden. "Survival of the fittest" var det slagord, som den engelske filosof Herbert Spencer (1820-1903) havde brugt til at forsvare sine liberale ideer om individuel frihed, og som Darwin havde brugt til at forklare sin teori om arternes oprindelse med. Men både i USA og Europa blev Darwin og Spencer i stedet hurtigt brugt til at retfærdiggøre tvivlsomme politiske formål, såsom at marginalisere de svage og retfærdiggøre den hvide races dominans. Vigtige politiske personligheder engagerede sig i politiske foreninger, som f.eks. i Francis Galtons (1822-1911) eugeniske selskab, der talte personer som den engelske premierminister Neville Chamberlain (1869-1940)

◀ I første halvdel af 1900-tallet begyndte det at vise sig, at videnskabens forsøg på at beskrive verden kan ende i problemer og paradokser, fordi vi i vores beskrivelse altid selv indgår som en del af beskrivelsen. M.C. Escher: *Drawing Hands*, 1948 · The M.C. Escher Company BV, Baarn.

og den førende fortaler for USA's neutralitet, Charles Lindbergh (1902-74). Tvangssterilisationer og frenologiske studier – dvs. studier af menneskekraniets udformning – var i høj kurs helt frem til Anden Verdenskrig, der med Hitlertyskland kulminerede i sygelige racehygiejniske fantasier (se s. 347).

Et mindre hårrejsende, men alligevel betydningsfuldt eksempel er termodynamikkens anden lov, der siger, at evighedsmaskiner ikke findes, fordi uisolerede fysiske og kemiske systemer taber varme og øger deres entropi, når de udfører irreversibelt arbejde. Den anden lov blev derfor betragtet som det ultimative bevis for universets "varmedød": ligegyldigt hvordan man vender og drejer det, vil universet langsomt og med usvigelig sikkerhed nærme sig en tilstand, hvor al energi er ligeligt fordelt overalt i en stor, ensartet grød. "Die Entropie des Universums strebt einem Maximum zu" – universets entropi tilstræber et maksimum – var, hvad Rudolf Clausius (1822-88) havde proklameret i 1865. Ikke nok med at mennesker, civilisationer og kunst, ligesom kærlighed, håb og tro, blot var at betragte som et resultat af tilfældige sammenstød af atomer, der farer forvildet omkring – det var hermed også bevist, at alt det smukke og gode, der fandtes i denne og andre verdener, ville forsvinde, og at universet til sidst ville ende i en prædetermineret ligegyldighed; en flad suppe af elementarpartikler, der langsomt skvulpede døden i møde.

Også Freuds (1856-1939) psykoanalyse føjede sig til denne kritik af menneskets forestilling om sig selv som universets centrum. Hans teorier om det ubevidste betød, at determinismen ikke længere blot var til stede i det materielle liv, men i lige så høj grad i vores sjæleliv, i vores sansninger, drifter og seksuelle forlangender.

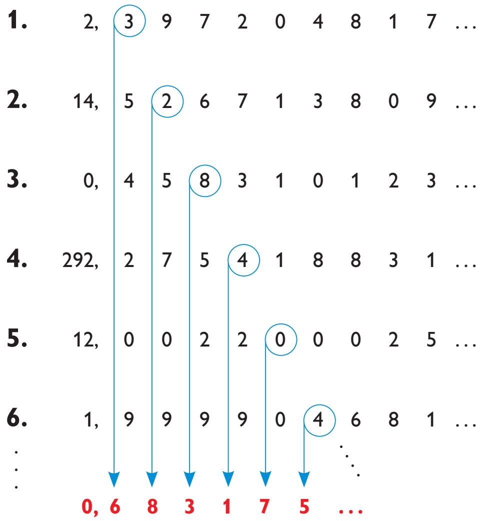
Alle disse "endegyldige" videnskabelige fortællinger (som skulle vise sig ikke at være så endegyldige endda) gav brændstof til en række kulturpessimistiske strømninger, der især ytrede sig i litteraturen, kunsten og filosofien. Man troede, at man så at sige havde nået et videnskabeligt højdepunkt, og at det herfra kun kunne gå nedefter igen. Det sås f.eks. hos Oswald Spengler (1880-1936), der skrev om civilisationers nødvendige forfald, *fin de siècle*-kunstens undergangsæstetik eller digteren T.S. Eliots (1888-1965) skepsis over for os "hule mænd", som får verden til at ende "Ikke med et brag, men med en hvisken".

Dette kapitel handler om, hvordan den naturvidenskabelige forskning i løbet af 1900-tallet afmonterede mange af de klippefaste videnskabelige overbevisninger fra 1800-tallet og erstattede dem med nye, mere præcise, men også mere relativerende lovmæssigheder. Det viste sig nemlig gang på gang, at det endegyldige bevis for dette eller hint ikke lod sig finde, og at det, man tidligere troede var så nemt og entydigt, faktisk var særdeles kompliceret. De kulturpessimistiske strømninger, der modstræbende havde accepteret videnskabens sejrsgang, kunne derfor langsomt udvikle en ny spontanitet, efterhånden som det blev tydeligt, hvor lidt man i naturvidenskaben egentlig vidste og kunne gøre.

Formaliseringens grænser i matematik og logik

Ved indgangen til 1900-tallet var mange forskere enige om, at matematik og logik nød en speciel status inden for de videnskabelige fag til forskel fra andre discipliner såsom kemi, fysik og biologi. Matematik og logik blev anset som perfekte, statiske og evige former for viden, der ikke nødvendigvis havde empiriske koblinger til virkeligheden. De blev derfor defineret som formelle videnskaber. "Hvordan er det muligt," spurgte Albert Einstein (1879-1955) i 1921, "at matematik, som er et produkt af den menneskelige tanke uafhængig af erfaringen, passer så fortræffeligt til de objekter, vi møder i den fysiske virkelighed?", og fysikeren Eugene Wigner (1902-95) talte for mange kolleger, når han udbredte sig om "matematikkens urimelige effektivitet inden for naturvidenskaberne."

Alligevel skulle det vise sig, at forsøgene på at forstå virkeligheden ud fra den rene matematik og logik heller ikke gik ram forbi af ubestemmeligheder og paradokser. I løbet af det 20. århundrede åbenbaredes der en lang række problemer omkring matematikkens fundamenter, og selv de mest basale principper omkring hvad et tal er, hvad et bevis er, og hvorvidt matematiske objekter eksisterer eller ej, blev debatteret i indædte kontroverser. På en måde var det Richard Dedekind (1831-1916) og Georg Cantor (1845-1918) fra kapitel fem, der startede denne "grundlagskrise" med deres meta-matematiske overvejelser omkring, hvad uendelige mængder og tal er. Men der skulle gå 20-30 år, før det gik op for enkelte matematikere hvilke konsekvenser, disse overvejelser reelt havde for forsøgene på at formalisere og aritmetisere hele matematikken. Men i og med at formaliseringens grænser blev påvist af tænkere som Bertrand Russell (1872-1970), Kurt Gödel



Med sit berømte diagonalbevis kunne Cantor vise, at de reelle tal ikke kunne tælles, det vil sige sættes i en en-til-en korrespondance med de naturlige tal 1, 2, 3, 4..., og at de reelle tal derfor måtte have en "højere grad af uendelighed" end de naturlige eller de rationelle tal. Beviset går i al sin simpelhed ud på at forsøge at lave en liste af alle mulige reelle tal. Seks af dem er listet til højre i figuren. Tallene til venstre er de korresponderende naturlige tal, som "tæller" de reelle tal, og man skal forestille sig, at rækken fortsætter i det uendelige. Nu kan man blot skrive et nyt reelt tal nederst i listen, som dannes ved at udskifte den første decimal på det første relle tal med et tilfældigt andet, dernæst den anden decimal på det andet reelle tal, og så fremdeles. Dette nye tal forneden kan umuligt være i listen, fordi tallet jo ikke kan være ens med det første tal, idet den første decimal er anderledes. Det kan heller ikke være ens med det andet tal, fordi den anden decimal er forkert osv. Idet vi jo fra start antog, at listen indeholder *alle* de reelle tal, har vi fundet en modstrid. Ergo kan man ikke lave en tællelig liste af de reelle tal. De reelle tal har således en højere orden af uendelighed end de naturlige tal.

(1906-78) og Alan Turing (1912-54), opstod der en art matematisk revolution: opdagelsen af fundamentalt nye koncepter om matematisk beregnelighed og uberegnelighed, nye tanker om kompleksitet og tilfældighed og ikke mindst forudsætningerne for udviklingen af den moderne computer.

Matematikken havde i løbet af meget kort tid fået status som sandhedens talerør – faktisk i så høj grad, at man mente at kunne forklare hele virkelighedens struktur ud fra kombinationer af matematiske objekter. F.eks. udviklede førnævnte tysk-russiske matematiker Georg Cantor i årene 1871-84 en teori om de uendelige mængder, der forbavsede ham selv så meget, at han i et brev til en ven skrev: "Jeg ser det, men jeg tror ikke på det." I en serie af artikler mellem 1874 og 1897 beviste han blandt andet, at den uendelige mængde af hele tal havde et lige antal af medlemmer; at antallet af punkter på et linjestykke er lig med antallet af punkter på en uendelig linje og på en flade, og at antallet af såkaldte transcendentale tal – som π og e – er meget større end antallet af hele tal. Det hele lød så forrykt, at selv jesuitterne mente, at de nu igen kunne bevise Guds og treenighedens eksistens.

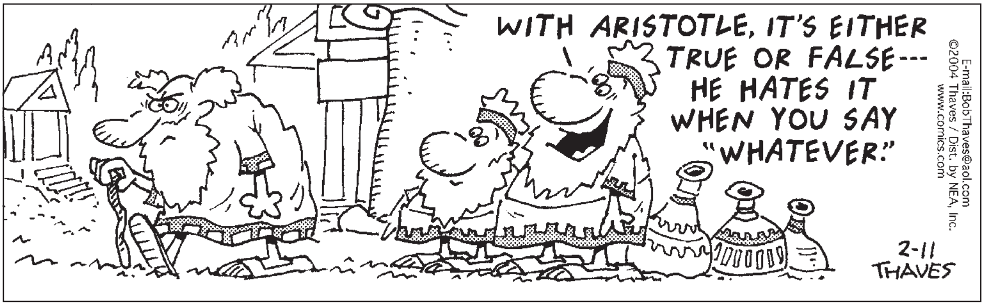
Den slags anvendelser holdt Cantor sig dog fra. I stedet mente han, at man kunne slutte sig til geometriens og dermed rummets opbygning ved at opdele et linjestykke i dimensionsløse punktmængder, altså talmængder, og derudfra konstruere kontinuet som en bestemt egenskab ved disse punktmængder. Cantors mængdelære og hans diagonalbevis (se diagrammet) viste, at der er forskellige grader af uendelighed. Størrelsen af mængden af reelle tal er for eksempel meget større end mængden af naturlige tal. Så selvom der findes en uendelig række af positive hele tal, så vil disse kun udgøre en forsvindende lille brøkdel af antallet af reelle tal. Desuden mente Cantor, at der ikke findes noget uendeligt sæt af tal, som er større end mængden af positive hele tal og samtidig mindre end mængden af reelle tal, hvilket han brugte til at formulere en hypotese om kontinuets beskaffenhed.

Det var tydeligt at se, at hele denne jongleren med tal og mængder kom fra en uhørt fantasifuld og original tænker, men man kunne lige så vel spørge, om det overhovedet var matematik? Reaktionerne blandt Cantors kolleger var i hvert fald ekstreme. Enten elskede de det, eller også hadede de det. Den tyske matematiker David Hilbert (1862-1943) forgudede teoriens abstraktionsgrad og generalitet og proklamerede, at "ingen skal udstøde os fra det paradis, som Cantor har skabt for os", mens den franske matematiker Henri Poincaré (1854-1912) erklærede, at "senere generationer vil anse mængdelæren som en sygdom, af hvilken man er blevet helbredt." Det var i hvert fald første gang en matematiker så konsekvent havde brugt matematik til at tænke over, hvad selve det matematiske apparat er i stand til at udsige. Det var meta-matematik. For tilhængerne af Cantor indvarslede mængdelæren en ny periode, hvor man håbede på at kunne komme til bunds i de logisk-matematiske strukturer, som styrer denne verden, og hvor man ved hjælp af et begrænset sæt af selvindlysende sandheder ville kunne frembringe en matematisk formalisme, der ikke længere var plaget af sprogets og fornuftens flertydigheder.

Men det skulle vise sig, at Cantors mængdelære samtidig indeholdt kimen til enden på selv samme håb om endelig matematisk afklaring. Man opdagede snart efter, at ikke kun vores sprog og intuitive menneskelige fornuft var begrænset. Selve det naturvidenskabelige ideal, den urørlige logiske og matematiske formalisme, viste sig at være modtagelig for selvmodsigelser. Bertrand Russell var den første, der opdagede, at Cantors mængdelære kunne føre til nogle grimme paradokser. Det var inden, han sendte sit brev til Gottlob Frege (1848-1925) i 1902 (s. 219). Russell spurgte sig selv: hvilke egenskaber har mængden af alle delmængder af den universelle mængde (dvs. den, som indeholder alt)? Problemet var, at Cantors hierarki af mængder indebar, at mængden af alle delmængder af en given mængde altid var større end mængden selv. Det var på den måde, kardinaltallene var opbygget. Men når man kigger på den universelle mængde, så kan mængden af alle delmængder af den universelle mængde umuligt være større end den universelle mængde – af den simple årsag, at den universelle mængde allerede indeholder alt. Paradokset minder om det klassiske barber-paradoks, der fortæller om en barber, der barberer alle, som ikke barberer sig selv. Men hvem – kan man spørge – barberer barberen? Ifølge definitionen barberer han kun sig selv, når han ikke barberer sig selv. Og det er umuligt. Med hensyn til barberen kan man selvfølgelig hurtigt finde en vej ud af paradokset ved enten at nægte, at en sådan barber overhovedet eksisterer, eller ved at sige at han har fuldskæg eller ingen skægvækst. Men hvad kan der være galt med hensyn til Russells paradoks omkring mængden af alle mængder, der ikke er medlem af sig selv?

Det var et problem. Der viste sig også en masse andre og lignende paradokser, bl.a. formuleret af Cesare Burali-Forti (1861-1931), Julius König (1849-1913) og Jules Richard (1862-1956). Grundlagskrisen fik mange matematikere til at spørge sig selv, om det ikke var bedre at trække sig tilbage til ældre og mere sikre måder at tænke matematik på. Der udvikledes hurtigt tre forskellige skoler, som havde hver deres filosofiske bud på en vej ud af matematikkens grundlagskrise: konstruktivisterne, også kaldet intuitionisterne; logicisterne med Bertrand Russell og Alfred North Whitehead (1861-1947) som fortalere; og formalisterne med David Hilbert som den mest berømte frontfigur.

Den mest kendte intuitionist – eller konstruktivist – var den hollandske matematiker Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881-1966). Han brød sig ikke om mængdelæren. Han kaldte det for "teologisk" matematik. Hvis matematikere vil bevise en tings eksistens, sagde han, skal de kunne vise den eller beregne den, og ikke bruge den slags tricks, hvor man først antager, at en ting ikke eksisterer, hvorefter man viser, at det fører til en selvmodsigelse. Denne form for logik bliver også kaldt *reductio ad absurdum*, reduktion til det absurde. Brouwer mente, at fremgangsmåden i sig selv var absurd. Hvis man skal bevise, at noget eksisterer, skal man kunne angive en endelig procedure, der konstruerer det. Brouwer nægtede derfor også gyldigheden af det velkendte *tertium non datur* – det udelukkede tredjes princip, der stammer fra Aristoteles (384-322 f.v.t.), og som siger, at der for ethvert udsagn P gælder, at P er enten sandt eller falsk.



Aristoteles' *tertium non datur* siger, at der for ethvert udsagn P gælder, at P er enten sandt eller falsk. Brouwer accepterede ikke dette, i hvert fald så længe P indeholdt en uendelig række af tal · Distr. PIB Copenhagen.

Inspireret af vitalismen opponerede Brouwer også mod matematikernes "atomistiske" forståelse af tid og rum. At forestille sig tiden som en linje fyldt op af punktmængder, eller at forestille sig det kontinuerte rum som et uendelig tæt sammenrend af dimensionsløse punkter, var for Brouwer en matematisk idealisering, ikke virkelighed. Det var et godt værktøj til at modellere fysiske fænomener, utvivlsomt, men det var ikke i nærheden af at kunne påstå at være objektiv viden om tidens og kontinuets "væsen". For at kunne forstå dette kontinuum måtte der være noget mere; noget som ikke kan fanges af lingvistiske, formelle og logiske strukturer. Dette "mere" var individets *intuition*. Brouwer mente, at han hermed havde præciseret Immanuel Kants (1724-1804) ide om menneskets intuitive erkendelse af rum og tid – det såkaldt syntetiske apriori, som Kant havde udviklet i sit forsøg på at sammentænke Leibniz' (1646-1716) og Newtons (1643-1727) positioner (s. 137-139). Kant havde blot forvekslet selve kontinuet med en bestemt geometri. "Den oprindelige fortolkning af kontinuet hos Kant og Schopenhauer som en ren apriori intuition kan i princippet opretholdes", fastslog Brouwer. Blandt væsentlige forgængere for Brouwers intuitionisme kan man finde førnævnte matematiker Henri Poincaré. Poincaré havde dog en mindre individualistisk tilgang til intuitionen end Brouwer, da han argumenterede for, at vores umiddelbare forestilling af tid og rum var resultatet af en evolutionær proces.

Brouwer var fortaler for en konstruktivistisk matematik, som var baseret på opbyggende beviser og ikke på logisk baserede følgeslutninger. Ifølge ham skulle matematik være konstruktiv og konkret, og ikke forlade sig på logiske reduktioner og selvrefererende luftkasteller. Andre matematikere, logicisterne, gik den stik modsatte vej, som f.eks. italieneren Giuseppe Peano (1858-1932). Han ville gøre matematikken abstrakt i en sådan grad,

362 PROLEGOMENA TO CARDINAL ARITHMETIC [PART II

***54·42.** $\vdash :: \alpha \in 2 \,.\supset :. \beta \subset \alpha \,.\, \exists ! \beta \,.\, \beta \neq \alpha \,.\equiv .\, \beta \in \iota\text{‘‘}\alpha$

Dem.

$\vdash .$ *54·4 $. \supset \vdash :: \alpha = \iota\text{‘}x \cup \iota\text{‘}y \,.\supset :.$

$\beta \subset \alpha \,.\, \exists ! \beta \,.\equiv : \beta = \Lambda \,.\mathrm{v}.\, \beta = \iota\text{‘}x \,.\mathrm{v}.\, \beta = \iota\text{‘}y \,.\mathrm{v}.\, \beta = \alpha : \exists ! \beta :$

[*24·53·56.*51·161] $\equiv : \beta = \iota\text{‘}x \,.\mathrm{v}.\, \beta = \iota\text{‘}y \,.\mathrm{v}.\, \beta = \alpha$ (1)

$\vdash .$ *54·25 . Transp . *52·22 $. \supset \vdash : x \neq y \,.\supset .\, \iota\text{‘}x \cup \iota\text{‘}y \neq \iota\text{‘}x \,.\, \iota\text{‘}x \cup \iota\text{‘}y \neq \iota\text{‘}y :$

[*13·12] $\supset \vdash : \alpha = \iota\text{‘}x \cup \iota\text{‘}y \,.\, x \neq y \,.\supset .\, \alpha \neq \iota\text{‘}x \,.\, \alpha \neq \iota\text{‘}y$ (2)

$\vdash . (1) . (2) . \supset \vdash :: \alpha = \iota\text{‘}x \cup \iota\text{‘}y \,.\, x \neq y \,.\supset :.$

$\beta \subset \alpha \,.\, \exists ! \beta \,.\, \beta \neq \alpha \,.\equiv : \beta = \iota\text{‘}x \,.\mathrm{v}.\, \beta = \iota\text{‘}y :$

[*51·235] $\equiv : (\exists z) \,.\, z \in \alpha \,.\, \beta = \iota\text{‘}z :$

[*37·6] $\equiv : \beta \in \iota\text{‘‘}\alpha$ (3)

$\vdash . (3) .$ *11·11·35 . *54·101 $. \supset \vdash .$ Prop

***54·43.** $\vdash :. \alpha, \beta \in 1 \,.\supset : \alpha \cap \beta = \Lambda \,.\equiv .\, \alpha \cup \beta \in 2$

Dem.

$\vdash .$ *54·26 $. \supset \vdash :. \alpha = \iota\text{‘}x \,.\, \beta = \iota\text{‘}y \,.\supset : \alpha \cup \beta \in 2 \,.\equiv .\, x \neq y \,.$

[*51·231] $\equiv .\, \iota\text{‘}x \cap \iota\text{‘}y = \Lambda \,.$

[*13·12] $\equiv .\, \alpha \cap \beta = \Lambda$ (1)

$\vdash . (1) .$ *11·11·35 $. \supset$

$\vdash :. (\exists x, y) \,.\, \alpha = \iota\text{‘}x \,.\, \beta = \iota\text{‘}y \,.\supset : \alpha \cup \beta \in 2 \,.\equiv .\, \alpha \cap \beta = \Lambda$ (2)

$\vdash . (2) .$ *11·54 . *52·1 $. \supset \vdash .$ Prop

From this proposition it will follow, when arithmetical addition has been defined, that $1 + 1 = 2$.

Det tog Russell og Whitehead 362 sider at komme frem til, at resultatet nederst er logisk. *Principia Mathematica* (1910-13).

at den kunne undgå enhver berøring med det naturlige sprog og dermed undgå den menneskelige fejlbarlighed. Dette skulle ske ved udviklingen af en såkaldt symbolsk logik, der var konsistent og fejlfri, og som kun behøvede at referere til sig selv. Bertrand Russell og Alfred North Whitehead forsøgte at følge Peanos idealer i deres monumentale værk *Principia Mathematica* (1910-13), hvor de brugte et helt bind til at bevise, at 1+1 = 2. De brød argumenterne ned i så små stumper, at det tog dem hundreder af sider og tusinder af mængdeteoretiske overvejelser og logiske følgeslutninger for at komme frem til dette storslåede resultat. Russell og Whitehead forsøgte at gendrive Kants forestillinger om det syntetiske apriori inden for aritmetikken, ligesom Einstein havde gjort det få år før inden for geometrien ved at vise, at universet bedst kan beskrives ved en ikke-euklidisk geometri; at der med andre ord ikke forud for vores bevidsthed fandtes nogen ren geometri, der var bedst egnet til at udtrykke vores erfaring. Russells og Whiteheads parallelle "anti-kantianske" program skulle vise, at talteori kunne deduceres ud fra ren logik – altså at tal og alle deres egenskaber i bogstaveligste forstand kun var logiske konstruktioner. Deres anstrengelser førte til en række kontroverser. Mere om dem om lidt.

Den tredje matematiske skole fra begyndelsen af 1900-tallet, som havde (og har) stor indflydelse på praktiserende matematikere, var formalisterne. Formalisternes fremmeste fortaler var den tyske matematiker David Hilbert, der ligesom Kant kom fra Königsberg. Han forsøgte at finde en mellemvej mellem intuitionisternes evigt foranderlige univers af åbne objekter og logicisternes frosne og platoniske verden af uforanderlige former.

I år 1900 holdt Hilbert en tale, hvor han fremlagde en liste med 23 matematiske problemer, som gerne skulle løses af matematikerne i det kommende århundrede. Når det var gjort – sådan var drømmen – kunne matematikerne en gang for alle læne sig tilbage og nyde den komplette formalisering, som var hævet over enhver usikkerhed, og som før eller siden – hvis man anstrengte sig tilpas meget – ville kunne besvare ethvert matematisk spørgsmål, der endnu var åbent. Det ville være enden på matematik. Den aksiomatiske metode skulle føres til ende, og man skulle eliminere al sproglig usikkerhed og intuitiv tænkning ved at opbygge et kunstigt sprog, der var præcist, komplet og, som han udtrykte det, "mekanisk".

I modsætning til Brouwer mente Hilbert, at ethvert matematisk udsagn kunne vises at være sandt eller falskt efter et endeligt antal af operationer – lidt ligesom en computeralgoritme, der tygger sig igennem masser af tal for til sidst at finde en løsning. Da matematik jo er, som Hilbert sagde, "en leg med meningsløse symboler på et stykke papir", behøvede symbolerne blot at følge nogle syntaktiske regler, hvorefter man ved hjælp af logiske følgeslutninger og et lille sæt af modsigelsesfrie og uafhængige aksiomer – altså nogle principper, som accepteres uden bevis – kunne starte legen. Man kunne så manipulere symbolerne efter reglerne uden at lade sig forvirre af, hvad symbolerne betød. Hilberts såkaldte "Entscheidungsproblem" (beslutningsproblem) sigtede altså på at etablere et sådant fuldendt formelt system, og de fleste praktiserende matematikere ville have været lykkelige, hvis dette ambitiøse program var lykkes. Det eneste problem var blot, at det var umuligt.

Gödels bevis

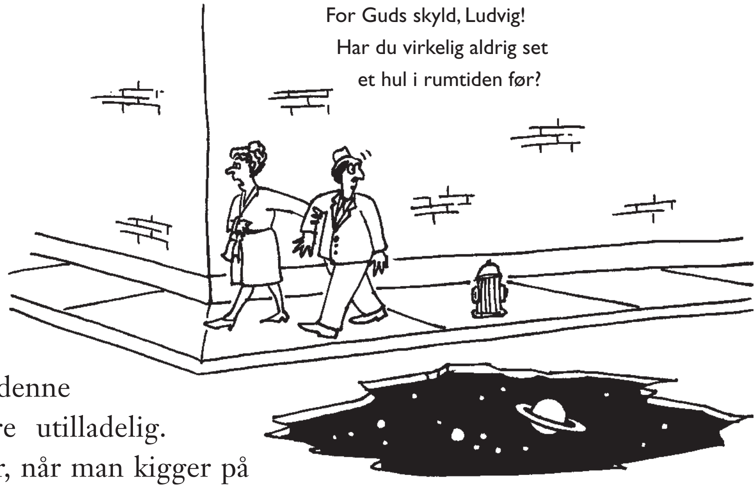
I 1930'erne viste Kurt Gödel og Alan Turing, at det var umuligt at formalisere al matematik. Hvorfor? Fordi ethvert formelt aksiomatisk system enten er inkonsistent eller ufuldstændigt. At et formelt aksiomatisk system er inkonsistent betyder, at det beviser falske teoremer, falske sætninger. At et formelt aksiomatisk system er ufuldstændigt betyder, at det ikke beviser alle sande teoremer. Begge ting er ganske irriterende, når man nu har gjort sig så mange anstrengelser for at gøre det omvendte: at opbygge et konsistent og fuldstændigt formelt system, som kan vise, om et hvilket som helst matematisk udsagn i systemet er rigtigt eller forkert.

Gödels bevis blev offentliggjort i et tysk tidsskrift under titlen "Über formal unentscheidbare Sätze der *Principia Mathematica* und verwandter Systeme" (om uafgørlige sætninger i *Principia Mathematica* og relaterede systemer). Analysen var en enorm kraftpræstation. For at komme i gang skulle Gödel først udarbejde 46 forberedende definitioner og gennemgå en lang række indledende teoremer.

For at give en fornemmelse af argumenterne i Gödels bevis skal det her gennemgås – men på et plan, der bruger andre definitioner af "konsistens" og "fuldstændighed" end dem, Gödel brugte. De er dog semantisk ækvivalente. Gödel startede med at kigge på det klassiske løgnerparadoks: "Denne sætning er usand." Hvilken lære kan man drage ud af dette paradoks? Hvis sætningen taler sandt, er den usand. Hvis den er usand, er den sand. Det betyder, at den hverken kan være sand eller usand, og det er ikke tilladt i den konventionelle matematik ifølge det før-

I René Magrittes' berømte billede *Ceçi n'est pas une pipe* fra 1926 behandles problemet med at sammenblande ting og deres repræsentationer. Det er jo faktisk ikke en pibe, man ser, men kun et billede af den. Og selv hvis der hang en "rigtig" pipe i stedet for et billede af den, kunne sætningen stadig være sand: piben kunne være en attrap, eller sætningen kunne referere til lærredets baggrundsfarve, ikke til piben. Gödels sætning "Denne sætning er ubeviselig" viser, at paradokser kan stikke dybere endda. Hans sætning refererer kun til sig selv, og ikke til noget uden for det aksiomatiske system (et billede, en attrap eller en baggrundsfarve). Og stadig kan vi ikke afgøre, om sætningen er sand eller falsk · Los Angeles County Museum of Art © Rene Magritte/billedkunst.dk.

På trods af konstruktivisternes/intuitionisternes advarsler har fysikere og matematikere som regel ingen problemer med uendeligheder, paradokser og singulariteter.



omtalte *tertium non datur*. Oversat til matematiske ligninger ville denne sætning altså være utilladelig. Men hvad sker der, når man kigger på udsagnet "Denne sætning er ubeviselig", og koder den som numeriske ligninger, således at den udgør et bestemt formelt aksiomatisk system (med 46 definitioner). Ville denne sætning også være utilladelig? Der er to muligheder. Enten er sætningen beviselig, og altså et tilladeligt matematisk teorem, eller ubeviselig, og derfor et utilladeligt teorem (det må lige nævnes, at en sætning, der er "beviselig" i moderne logik, betyder, at den også er sand, mens det for en sætning ikke er nok at være sand for at være beviselig. Med andre ord er prædikatet "sand" – forstået som værende i overensstemmelse med virkeligheden – nødvendigt for en beviselig sætning, men ikke tilstrækkeligt til at den kan bevises). I tilfælde af at sætningen er beviselig, må dens indhold altså være sandt, dvs. at dens semantiske indhold er i overensstemmelse med virkeligheden. Men da sætningen jo siger, at den er ubeviselig, betyder det, at den er usand. Her er vi igen i en aksiomatisk utilladelig situation, fordi vi hermed beviser en forkert sætning. Ergo arbejder vi med et inkonsistent aksiomatisk system, som indeholder usande teoremer. Det må ikke ske. Lad os derfor kræve, at det ikke kan ske! Vi kræver – som nødvendig hypotese – at Gödels sætning er ubeviselig. Men det er heller ikke godt, fordi vi så ved, at sætningen "Denne sætning er ubeviselig" er sand – og dermed er vores analyseapparat jo ufuldstændigt. Det fanger ikke alle sande sætninger. Konklusionen må være, at vores formelle aksiomatiske system enten beviser usande sætninger (meget ubehageligt), eller at den ikke kan bevise alle sande sætninger (mindre slemt, men ærgerligt). Hvis man kræver konsistens, bliver det ufuldstændigt. Hvis man kræver fuldstændighed, bliver det inkonsistent. Matematik i den form, Hilbert forestillede sig, undslipper ikke paradokserne: den fuldstændige formalisering er umulig.

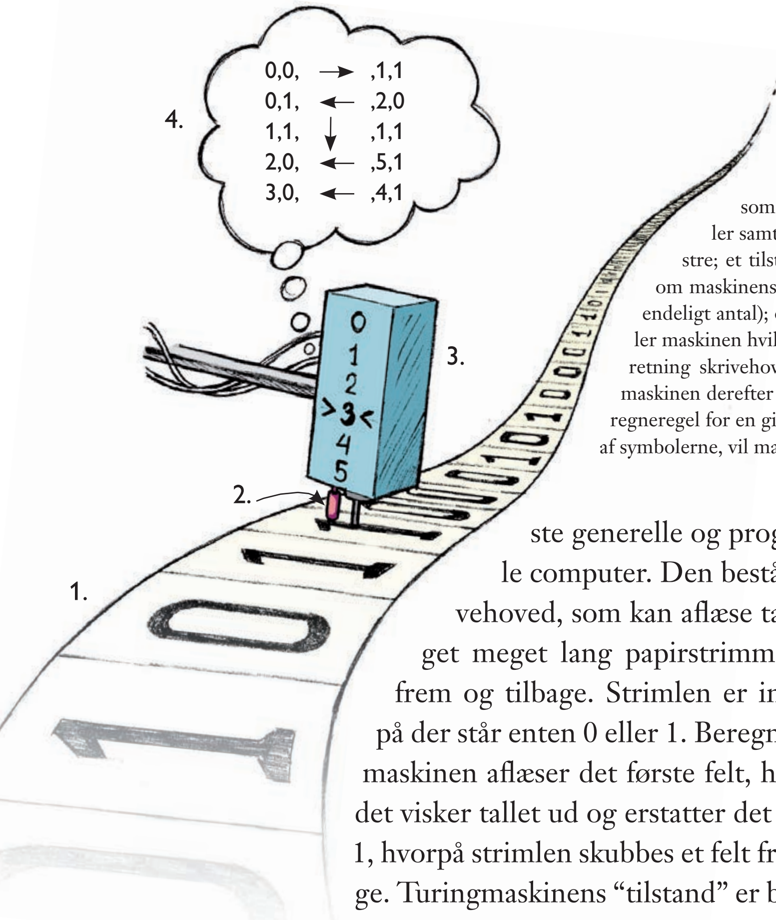
Reaktionerne var til at starte med stor forbløffelse. Logikkens og matematikkens fundamenter var pludselig blevet gennemhullet, og mange matematikere mistede en hel del entusiasme til at fortsætte ud af den vej, som Hilbert havde udstukket for dem. Men det viste sig i løbet at meget kort tid, at matematikernes normale hverdag slet ikke blev berørt af Gödels resultater. Man kunne lige så godt ignorere problemerne og fortsætte som altid, fordi man kun ville komme i problemer i de mest obskure og mærkelige udkanter af matematisk forskning. Selv i dag er Gödels bevis mere berømt blandt videnskabsteoretikere og filosoffer end blandt praktiserende matematikere.

Det er også interessant at iagttage, at Brouwers konstruktivistiske matematiske filosofi er den eneste, som undgår paradokser og inkonsistenser. Det skyldes, at Brouwer er meget forsigtig med hensyn til, hvad man ifølge ham kan udtale sig om. Men på trods af det har den matematiske konstruktivisme altid været den mest marginaliserede blandt de matematiske skoler, der opstod i begyndelsen af 1900-tallet. Måske skyldes det den omstændighed, at tal og matematiske beviser virker så reelle, så virkelige, når man sidder og arbejder med dem dagen lang, at de fleste matematikere får et meget "platonisk" forhold til deres fag. Matematikkens urimelige effektivitet med hensyn til at beskrive verden kan nærmest tvinge én til at tro, at matematik er lige så konkret og virkeligt som den stol, man sidder og arbejder på.

Turing og den universelle maskine

Den engelske matematiker Alan Turing fremlagde i 1936 en endnu dybere begrundelse for ufuldstændighed end Gödel, samtidig med at han udviklede det teoretiske grundlag for den moderne computer. I Alan Turings samtid blev ordet "computer" stadig forstået som værende et menneske, der arbejdede med at beregne. Det var derfor en meget kontroversiel ide at betragte mentale processer som noget, der kunne splittes op i simple mekaniserbare operationer.

En såkaldt Turingmaskine er en abstrakt repræsentation af en regnemaskine. Selvom Turing ikke rent fysisk byggede den første "moderne" computer – det gjorde amerikaneren John Vincent Atanasoff (1903-95) – kan man med god ret sige, at Alan Turing på et teoretisk plan opfandt den før-



En mekanisk version af en Turingmaskine består af en papirstrimmel (1), som er inddelt i felter, hvorpå der står nogle symboler, typisk 0 og 1; et skrivehoved (2), som kan læse, viske ud og skrive symboler samt bevæge sig trinvis til højre eller venstre; et tilstandsregister (3), som gemmer viden om maskinens tilstand (hvoraf der kun kan være et endeligt antal); og et sæt regneregler (4), som fortæller maskinen hvilket symbol, der skal skrives, i hvilken retning skrivehovedet skal rykke, og hvilken tilstand maskinen derefter skal gå over i. Når der ikke er nogen regneregel for en given tilstand og en given kombination af symbolerne, vil maskinen stoppe.

ste generelle og programmerbare digitale computer. Den består af et læse- og skrivehoved, som kan aflæse tal på en tynd og meget meget lang papirstrimmel, der kan skubbes frem og tilbage. Strimlen er inddelt i felter, hvorpå der står enten 0 eller 1. Beregningen begynder, når maskinen aflæser det første felt, hvorefter skrivehovedet visker tallet ud og erstatter det med enten et 0 eller 1, hvorpå strimlen skubbes et felt frem eller et felt tilbage. Turingmaskinens "tilstand" er bestemt af et sæt regneregler, som er definerede fra starten af. Dens aktuelle tilstand ændrer sig altså løbende i forhold til de ettaller og nuller, den møder på vejen. Maskinen kan for eksempel være i tilstand 7, hvor den har en regel om at skrive 0, når den møder et 1-tal, for derefter at bevæge sig et hak til venstre og gå over i tilstand 5. Når den så læser et 0 i tilstand 5, kan reglen være, at den skal skrive 1, gå én til højre og skifte til tilstand 12 osv. Turingmaskinen er altså en mekanisk bureaukrat, som ikke behøver frokostpauser eller toiletbesøg. Den gør præcis de ting, den får besked på ved at slå op i en prædefineret og endelig tabel, som den kan huske, og derefter rykke rundt på ettaller og nuller.

I virkeligheden er en Turingmaskine en abstraktion af et computerprogram, snarere end en maskine – dvs. den er egentlig et stykke software, ikke hardware. Man kan vise, at man kan lave Turingmaskiner, der på trods af deres ekstreme simpelhed kan beregne en hvilken som helst funktion, som en normal digital computer kan beregne. Den skal blot have nok tid og papir. Turingmaskinen er derfor en konkret definition af, hvad en effektiv algoritme er. At en algoritme er effektiv forstås her, som at den skal have et endeligt antal veldefinerede trin, der kan udføres mekanisk, og at den med det samme input altid skal producere det samme output.

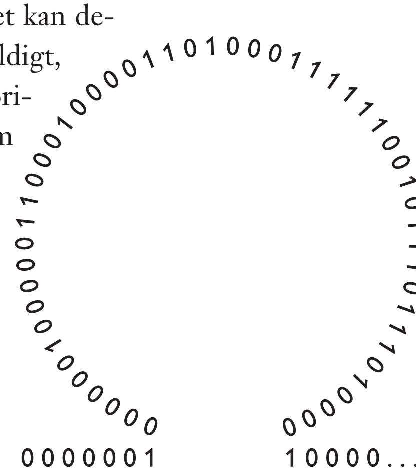
På et idehistorisk plan var Turingmaskinen meget vigtig, fordi den var en konkret realisering af Hilberts ide om at transformere hele matematikken til en formel mekanisk proces, hvor man ikke behøver andet end slavisk at følge et endeligt antal opskrifter for at bevise et hvilket som helst teorem. Dette var formuleringen af Hilberts "Entscheidungsproblem", og Turings svar var, at der ikke findes nogen "Entscheidung", dvs. at der ikke findes nogen effektiv metode eller mekanisk procedure, ikke nogen computer eller noget computerprogram, som på forhånd kan afgøre, om et vilkårligt andet computerprogram stopper, dvs. får regnet sig færdig til et resultat eller ej. Dette kaldes Turings "stop-problem". Gödels ufuldstændighedsteorem er så blot en naturlig følge af stop-problemet, fordi hvis man kan vise, at det er umuligt at afgøre, om et computerprogram stopper, så kan der heller ikke findes et fuldstændigt og konsistent sæt af aksiomer, med hvilke man kan slutte sig frem til, om en matematisk sætning kan bevises eller ej, idet aksiomerne jo ville kunne oversættes til en effektiv algoritme.

Gödels og Turings arbejder rejste væsentlige spørgsmål for grænserne for formel tænkning. Selv det at antage, at noget var "falskt" eller "sandt" i matematisk forstand, var blevet problematisk, fordi begge kategorier var blevet beviseligt ubeviselige. En platonist som Gödel kunne måske godt tro på, at kontinuumshypotesen var falsk, ligesom Cantor mente, at den var sand, men nu var det ikke længere en sag, der kunne afgøres ved hjælp af matematik eller logik. Den amerikanske matematiker Paul Joseph Cohen (1934-2007) kunne i forlængelse af Gödels og Turings arbejde i 1960'erne vise, at kontinuumshypotesen for den sags skyld både kunne være sand og falsk, uden at det ville påvirke mængdelærens øvrige aksiomer. Nogle matematikere begyndte derfor at anse Cantors mængdelære som en forkert måde at gribe sagen an på. I stedet for at reducere et linjestykke til et sæt af individuelle punkter og tal, for derpå at konstruere et kontinuum, forsøgte man at forstå kontinuet ud fra en mere helhedsorienteret tilgang, hvor det snarere er strukturer og relationer, som betragtes som de fundamentale objekter i analysen, og ikke uendelige mængder af punkter.

En anden væsentlig pointe i Turings arbejde var, at hans matematiske argument afhang af fysikkens natur – i dette tilfælde af beregnelighedens grænser via en effektiv computeralgoritme. Det åbnede op for en meget tættere forbindelse mellem fysik og matematik end tidligere antaget. For hvis de logiske grænser for beregnelighed også gælder for alle regnemaskiner, vil en lang række problemer heller aldrig kunne løses i praksis. Turings stop-problem og bestemte aritmetiske beslutningsproblemer vil aldrig kunne finde en løsning, selv med den størst tænkelige computer. En lang række beregninger, som f.eks. sorteringen af elementer i en liste, vil kun kunne løses inden for et tidsrum, der er afhængig af problemets størrelse. Det vil sige, at hvis problemet er for stort, vil det aldrig kunne løses i endelig tid.

Et tredje aspekt ved Gödels og Turings resultater er, at ikke blot uvidenhed, men også tilfældighed sniger sig ind ad bagdøren på det, man troede var den mest eksakte af alle videnskaber. Den amerikanske matematiker Gregory Chaitin (f. 1947) kunne i sine analyser af Gödels og Turings resultater gå så vidt som til at konstruere et tal, der er absolut umuligt at kende. Tallet, som han kaldte Omega, var pr. definition så tilfældigt, at ingen computer nogen sinde ville være i stand til at finde alle dets decimaler, selv hvis den var uendelig hurtig. Ved hjælp af informationsteoretiske overvejelser om, hvordan tilfældighed og kompleksitet bør defineres matematisk, kunne han vise, at alle reelle tal er tilfældige tal – samtidig med at han beviste, at det er umuligt at udpege et eneste tilfældigt tal. Kompleksiteten af et tal kunne Chaitin definere som længden af det korteste computerprogram, der kan beregne tallet, mens et tilfældigt tal er et tal, hvis kompleksitet svarer til dets bitlængde, dvs. et tal, som ikke kan komprimeres.

Tallet Omega er bemærkelsesværdigt. Det kan defineres, men er ikke beregneligt. Det er tilfældigt, men tælleligt. Det indeholder den mest komprimerede information om Turings stop-problem



Omega er et ikke-beregneligt tal, dvs. et tal, hvor man ikke kan lave noget program, der kan beregne sig til alle dets bits. Trods disse vanskeligheder lykkedes det i 2002 at beregne de første 64 bits af Chaitins originale Omega. Resultatet er her skrevet ind i Omega-tegnet i binær form og viser, at tallet er ca. 0,78 procent. Med andre ord er sandsynligheden for – ved gentagne forlængelser af en bit-streng med tilfældige bits – at lave et program, som på et eller andet tidspunkt stopper, lig med ca. 0,78 procent.

for alle programmer med maksimalt n bit. Og derfor indeholder Omegas første n decimaler informationen om bevisbarheden for alle matematiske sætninger i et formelt system, som er n-bit stort.

Informationsbegrebet

Resultatet af overvejelserne om ufuldstændighed, tilfældighed, uvidenhed, sandsynlighed osv. førte til, at der i løbet af midten af 1900-tallet udvikledes et helt nyt koncept, hvormed man kunne begynde at forstå fysiske og matematiske strukturer. Dette koncept var *information*. I daglig tale defineres information som noget, der har med overførsel af viden at gøre. Dette er en forståelse af ordet, hvor enhver information kun kan forstås, hvis modtageren har en baggrundsviden om det pågældende sprog, om konteksten, de implicitte antagelser osv. Hvis man derimod forestiller sig, at der er kommet et brev fra stjernesystemet Alfa Centauri, kan man næppe gøre sig forhåbninger om at få en forståelse af indholdet, alle populære myter til trods – man kan måske ikke engang være sikker på, at der er tale om et brev.

I semantisk informationsteori taler man her om et referenceproblem: et objekts potentielle vidensindhold vil udefra kun kunne beskrives som en sandsynlighedsfordeling over alle mulige fortolkninger med én og samme sandsynlighed. Uden anden information vil brevet principielt kunne betyde alt mellem himmel og jord. Først når der opstår referentielle begrænsninger for realiseringen af de enkelte alternativer, vil der kunne opstå betydningsbærende elementer, som så igen kan virke tilbage og favorisere bestemte muligheder, og først da bliver brevet forståeligt. Meningsfyldt information (i f.eks. en binær sekvens) er altså ensbetydende med en ændring i sandsynlighedsfordelingen af mulighederne på grundlag af en yderligere indsnævring, som kun kan opstå ved en berøring med en omverden, fælles referencer, symboldannelse osv. Det betyder, at uden referencer kan et virkelig fremmed signal, hvor man intet kender til afsenderen, ikke være andet end et spejl. Et spejl af vores egne tanker. Man bliver offer for en projektion og begynder at lægge sine egne bekymringer og håb i signalets tydninger. Militæret vil sikkert forvente nye våben, videnskabsmanden ny erkendelse, og skønånden vil håbe på forløsning. Men når alt kommer til alt, vil vi mennesker ikke være i stand til at erkende eller forstå signaler fra sådanne verdener, selv hvis de stod med lysende flammer på firmamentet.

Information 1: At tælle bits og bytes

Inden for naturvidenskaberne har man netop udviklet en sådan referenceløs definition af ordet information. Den har derfor heller intet med forståelse at gøre. Den er en ren matematisk øvelse i at tælle bits og i at måle kompleksiteten af en binær sekvens, forstået som længden af det korteste program, der kan frembringe sekvensen. Denne fortolkning af information er rent kvantitativ og har vist sig at have enorm betydning for komprimering af data, krypteringsalgoritmer og for vores erkendelse af, hvordan uvidenhed kan defineres og måles.

Man kan sammenligne denne kvantitative definition af information med opfindelsen af termometret. I slutningen af 1500-tallet begyndte en gruppe af lærde i Venedig, der bl.a. talte Galilei (1564-1642), at definere temperatur som et tal, der kunne aflæses på en skala, uden ellers at beskæftige sig med hvad varme og kulde egentlig var for størrelser. Termometret (eller termoskopet, s. 100) var en pragmatisk løsning på et praktisk problem, og der skulle gå mere end 300 år, før man lærte, at temperaturmåling har at gøre med måling af molekylers hastighed. Det samme gør sig gældende ved måling af information i midten af 1900-tallet.

I løbet af Anden Verdenskrig arbejdede Alan Turing med at bryde tyskernes Enigmakode, hvilket lykkedes for ham og hans hold i den engelske kodeafdeling Bletchley Park i 1943. I løbet af denne tid udviklede Turing også en teoretisk ramme for "graden af tydelighed", hvormed en given mængde information kan transmitteres via et radiosignal. Det førte i 1948 den amerikanske ingeniør og matematiker Claude Elwood Shannon (1916-2001), der også havde arbejdet i Bletchley Park, til at definere information som det, der for modtageren af et signal opfattes som kompleks og dermed tilfældig støj. Et signal bestående af kun et enkelt symbol vil opfattes som meget lidt komplekst, fordi man jo ved, hvad man kan forvente. Men et meget komplekst signal uden synlige mønstre vil opfattes som meget tilfældigt.

Man må huske, at afsenderens intentioner, sproget og budskabets indhold er ting, der er fuldstændig irrelevante i denne her sammenhæng. Det eneste, der tæller, er den mængde af kompleksitet, eller usikkerhed (eller uvidenhed), der transmitteres, set fra en forudsætningsløs modtagers synspunkt. Shannon definerede mængden af output fra en informationskilde som et mål for informationens "entropi". Det er med andre ord et mål for den usikkerhed, der er knyttet til modtagerens tolkning af output. Shannon-

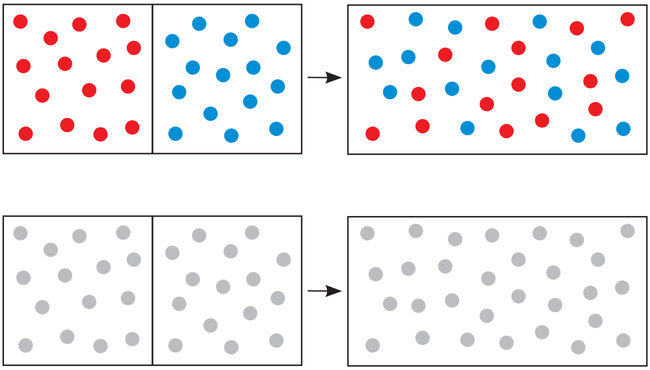
Denne originale Enigma-maskine er udstillet i Bletchley Park · Foto: Oliver Robinson.

entropien fungerer derfor som en tilnærmelse til, hvor stor informationsmængden i et givent budskab er – i modsætning til den forudsigelige del af budskabet. F.eks. bidrager gentagelser og let genkendelige mønstre i daglig talesprog ikke til informationsmængden og dermed ikke til entropien. Det ved enhver, som dagligt sender SMS'er. Det er ikke nødvendigt at skrive besværlige fyldord og selvforklarende bogstaver. Man k nøjs m a skriv så d forstås.

Information 2: Entropi er manglende viden

Shannons og Turings ideer fra 1940'erne og 50'erne indvarslede en ny tid: det var begyndelsen på informationsalderen. På samme måde som den industrielle revolution startede med vores evne til at manipulere og holde regnskab med energi i 1800-tallet, begyndte informationsalderen, da vi lærte, hvordan man manipulerer og holder regnskab med information. Shannons bidrag var bl.a. hans erkendelse af, at det binære talsystem, som kun består af nuller og ettaller, er den mest effektive måde at kommunikere data på. Og Shannon viste, at elektriske afbrydere, som kan skifte mellem strøm/ikke-strøm, var en pålidelig måde at generere disse "bits" på. Og idet bits og bytes kan repræsentere alt, hvad man kan sige med matematik, kan de også repræsentere lyde, billeder og alle mulige andre former for signaler, som kan kodes og afkodes matematisk. Shannon gjorde sig desuden overvejelser om, hvor stor en kapacitet et kommunikationsmedium som f.eks. en telefonlinje skal have for at transmittere signaler, og hvordan støj påvirker dem. Han kunne således udlede en lang række lovmæssigheder for, hvordan information lagres, transporteres og komprimeres via elektriske ledninger – teknikker som i dag ligger til grund for alle digitale datastrømme.

Shannon-entropien er tæt knyttet til den østrigske fysiker Ludwig Boltzmanns (1844-1906) brug af ordet entropi i termodynamikken. Boltzmann



Når man blander to forskellige gasser, vil entropien vokse (øverst). Men "blander" man to identiske gasser, vil entropien forblive den samme (nederst). Det viser, at entropi-begrebet indeholder et element af subjektivitet, da der er forskel på, i hvor høj grad man kan skelne mellem ens og ikke-ens gasser. Den statistiske fortolkning af entropi er derfor et mål for størrelsen af bestemte klasser af mikrotilstande, og ikke for egenskaberne ved disse mikrotilstande.

havde redefineret entropien, og den kunne ikke længere forstås som en absolut egenskab ved en ting, som f.eks. dens vægt, tryk eller volumen. I stedet måtte den tænkes som et mål for antallet af måder, hvorpå komponenterne i systemet kunne arrangeres på – vel at mærke uden at det påvirkede de målelige størrelser.

Et eksempel kunne være et kast med to terninger. Sandsynligheden for at få to seksere er én ud af 36, mens sandsynligheden for at få en syver er seks gange så stor, idet antallet af måder, man kan få syv på, er 1+6, 2+5, 3+4, 4+3, 5+2 og 6+1. Entropi er med andre ord et mål for, hvor mange måder en bestemt tilstand kan fremkomme på. Det samme gælder for store mængder af atomer og molekyler: blander man f.eks. to flasker med henholdsvis varme og kolde gasser, vil molekylerne blandes på en sådan måde, at den makroskopiske måling af temperaturen vil være et sted midt imellem de to tidligere målinger, mens entropien vil vokse uanset hvad, nemlig proportionalt med antallet af de nye kombinationsmuligheder, der kan frembringe den nye makroskopiske tilstand (Boltzmann kaldte dem "komplexioner"). En virkelig forbløffende erkendelse opstår i den situation, hvor man har to identiske flasker med identiske gasmolekyler og identisk tryk, temperatur osv. Her ville en sammenblanding af de to systemer faktisk ikke øge entropien. Men molekylerne blandes vel, kan man spørge? Jo, det gør de sikkert, men man kan hverken se eller måle det. Og det er det, der gør forskellen. Det er som at kaste med en ensidet terning. Du ved, hvad du får.

Denne observation gav Boltzmann et praj om, at den subjektive viden om et systems tilstand på en eller anden måde måtte have en betydning for måleresultatet. Filosoffer ville sige, at termodynamikkens anden hovedsætning beskriver verden ud fra et epistemologisk niveau og ikke ud fra et ontologisk niveau. Med andre ord er den anden hovedsætning en beskrivelse af *vores viden* om virkeligheden, ikke af virkeligheden selv. Havde der f.eks. – som foreslået af James Clerk Maxwell (1831-79) – været en dæmon i laboratoriet, som kunne se og følge hvert enkelt gasmolekyle, ville dæmonen erklære entropien for at være nul i alle tilfælde. Entropi, defineret af mennesker, er derfor et mål for vores manglende viden om systemet. Og det er i den forstand, at Boltzmanns entropi er tæt forbundet med Shannons information: de er begge et udtryk for den viden, som man *kunne* have om systemet, men ikke har. Shannons information og Boltzmanns entropi er ikke identiske, men de er to forskellige måder at udtrykke den samme ide på.

Information er ifølge Shannon et mål for mængden af viden. Det er ikke denne viden i sig selv. Derfor er informationsbegrebet ligesom energibegrebet – at kende mængden af energi fortæller ikke noget om dens tilstand, dens udbredelse eller dens form. Som en understregning af denne pointe kan man nævne, at Boltzmanns arbejde på mange måder foregreb kvantemekanikkens problemstillinger 50 år senere, idet også Niels Bohrs (1885-1962) fortolkning af kvantemekaniske eksperimenter var strengt epistemologisk. Det vil sige, at de kvantemekaniske ligninger ifølge Bohr fortæller om vores muligheder for at kunne vide noget om virkeligheden, og ikke noget om virkeligheden selv. (Hvilket Einstein som bekendt var stærkt utilfreds med, fordi han mente, at en fysisk teori burde kunne sige noget om virkeligheden og ikke kun noget om, hvad vi ved om virkeligheden; se også s. 294).

Men selvom information er et abstrakt, epistemologisk begreb, har realiseringen af information i form af budskaber naturligvis en fysisk basis. Tænk blot på bøger, aviser og håndskrevne breve. Forsendelsen af information har altid brug for et materielt medium. Kun med opfindelsen af computeren blev omkostningerne ved informationsoverførsel og -lagring så små, at man har tendens til at se bort fra dem. Men omkostningerne er der alligevel, og i 1960 proklamerede fysikeren Rolf Landauer (1927-99), som ligesom Shannon havde arbejdet hos IBM, derfor, at "information er fysisk". Selvom man måske kunne opfinde en kvantecomputer med et uendeligt lille energitab ved hver enkelt beregning, ville det koste en vis mængde entropi, når informationen skulle slettes igen. Derfor er selv kvantemekaniske computere, som man håber en dag vil kunne regne med såkaldte qubits i stedet for bits, underlagt fysikkens love.

Information 3: kvanter og qubits

Siden kvantemekanikkens fødsel har vores viden om atomer været en smule skizofren. Eller sådan opfattes det i hvert fald. Nogle gange opfører atomer sig som partikler, og andre gange som bølger. Desuden viste det sig, at elementarpartiklerne kunne reagere med hinanden på en sådan måde, at de "blandede deres tilstande". Erwin Schrödinger (1887-1961) kaldte dette fænomen for "Verschränkung", dvs. "entanglement" eller "sammenfiltrethed", og uddybede det ved at forklare, at "den maksimale viden om et totalt system ikke nødvendigvis behøver at indbefatte den totale viden om alle systemets dele, selv hvis delene er separerede og langt væk fra hinanden." Denne spøgelsesagtige kvantekorrelation på lange afstande har voldt store kvaler for fysikere og filosoffer.

I 1935 formulerede Albert Einstein og hans kolleger Boris Podolsky (1896-1966) og Nathan Rosen (1909-95) et tankeeksperiment, som skulle modbevise kvantemekanikkens besynderlige vekselvirkninger. At en elektron både kan beskrives som en bølge og som en partikel, var for Einstein ikke det værste problem. Værre var det, at et samtidigt kendskab til forskellige egenskaber ved denne elektron forbød sig på grund af Werner Heisenbergs (1901-76) usikkerhedsrelation. "Gud spiller ikke med terninger", var Einsteins reaktion.

Det såkaldte EPR-tankeeksperiment var designet til det formål. To kvante-korrelerede partikler fra samme kilde bliver skudt af sted i hver sin retning. Venter man længe nok, er de lysår fra hinanden, hvorefter man kan måle forskellige egenskaber hos dem. Hvis man f.eks. måler hastigheden af den første partikel (eller egentlig dens "moment", der er et produkt af dens hastighed og masse), og positionen af den anden, så er ræsonnementet, at fordi dens moment bevares, kan man bestemme både moment og position af den anden partikel, hvilket forbydes af Heisenbergs usikkerhedsrelation. Et problem, der egentlig kun kan forklares i dagligdags forstand, hvis man antager, at partikler kan kommunikere hurtigere end lysets hastighed, hvilket jo er i modstrid med relativitetsteorien.

I mange år var sagen henlagt, indtil den franske fysiker Alain Aspect (f. 1947) udførte et rigtigt EPR-eksperiment i 1982. Hans resultat var, at selv hvis information, der bevæger sig hurtigere end lyset, er nødvendigt, er det ikke muligt på samme tid at bestemme både position og moment af en partikel. De kvantemekaniske ligninger holdt altså vand – men det betød ikke, at

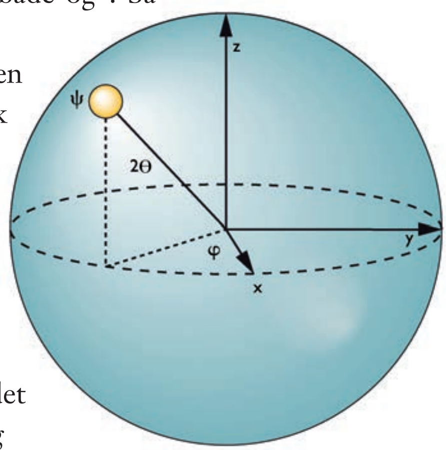
Alain Aspects udstyr fra hans EPR-eksperiment i 1982.

relativitetsteorien var modbevist. Det betød kun, at der ikke blev udvekslet information, samt at de to partikler er i en tilstand af overlejring, eller "entanglement", hvor de så at sige ved, hvad hinanden gør. Eller formuleret på en lidt mere akademisk, men ikke mindre mystisk måde: hvor deres tilstand er kvantekorreleret i form af en informationsoverlejring, således at deres information er indskrevet i deres fælles egenskaber. To partikler, som er i sådan en sammenfiltret tilstand, opfører sig ligesom tvillinger, hvor den ene kun kender sig selv i den andens billede: hvis den ene bliver kildet, griner den anden.

I dag mener mange, at nogle af kvantemekanikkens paradokser skyldes en blanding af to beskrivelsesniveauer – nemlig det epistemologiske niveau, hvor man beskriver, hvad man ved og kan vide, og det ontologiske niveau, hvor man påstår, at sige noget om de faktiske fysiske objekter og deres aktiviteter i verden. Ifølge Bohr forbliver kvantemekanikken på et rent epistemologisk niveau, hvorfor det er utilladeligt at tale om, hvorvidt der faktisk foregår en vekselvirkning på lange afstande eller ej. I moderne kvantemekanik er man således ved at forstå, at alle de spøgelsesagtige fænomener, som man kender fra eksperimenter med entanglement, teleportation og kvantecomputere, skal tolkes epistemologisk – og derfor informationsteoretisk. Det, der bevæger sig hurtigere end lyset, er vores fantasi, dvs. *ideen* om at vi med et snuptag kan være på Alfa Centauri. Og selv dette er ikke helt korrekt, for selv vores fantasi er determineret af en fysisk hjerne, der også er underlagt lyshastighedens begrænsning. Det, der teleporteres, er en repræsentation af viden og ikke materie. Men det betyder ikke nødvendigvis, at man ikke kan bygge computere, som udnytter denne repræsentation til at lave komplicerede beregninger.

I normale computere bliver bits repræsenteret af mange milliarder elektroner, som er samlede i siliciumtransistorer, der ligger side om side på små computerchips. Om de repræsenterer et 1 eller et 0 i den binære kode afhænger af, om de er til stede eller ej. Men når man først kommer ned til de enkelte elektroner, er det ikke længere muligt at tolke tilstandene entydigt. Elektronerne kan være "enten eller" eller "både og". Så kaldes de qubits.

Oprindelig startede det med fysikeren Richard Feynman (1918-88), der i 1981 fik ideen om kvantecomputere som en teoretisk abstraktion til at diskutere, hvad information er, set fra kvantemekaniske principper. Siden har mange forskere forsøgt at føre de teoretiske diskussioner over i laboratorierne. Men lige meget hvad de prøvede, så ville kvantecomputerne ikke lege med, når det kom til den faktiske implementering i chips og ledninger. Ubestemmeligheden – dvs. deres evne til at indtage en "superposition" – af de enkelte partikler kan ikke bibeholdes, så snart man vil sætte dem i position, hvor man kan begynde at regne med dem. Så selvom man har kunnet melde om fremskridt inden for kvantekryptering, er computere baseret på kvantemekaniske effekter stadig kun en teoretisk ide.



En qubit – i praksis én enkelt elektron – er den basale enhed for en kvantecomputer. Den ligner en almindelig bit i at kunne indtage tilstandene 0 og 1, men den kan også være i en tilstand af superposition (overlejring) af både 0 og 1. En qubit kan tegnes som en "Bloch-sfære", hvor informationen om den kodes via vinkelafstande fra de tre akser X, Y og Z. Når man måler på denne qubit, vil udfaldet enten være 0 eller 1, selvom qubitten er i en tilstand af superposition, dvs. af både-og. Man ville kunne udnytte dette i en hypotetisk kvantecomputer, fordi x-antal qubits ville kunne udføre ikke kun x, men 2^x beregninger samtidigt. En kvantecomputers regnekraft stiger altså eksponentielt med antallet af qubits i modsætning til konventionelle computere, hvor regnekraften stiger lineært med antallet af bits.

Beregningens grænser

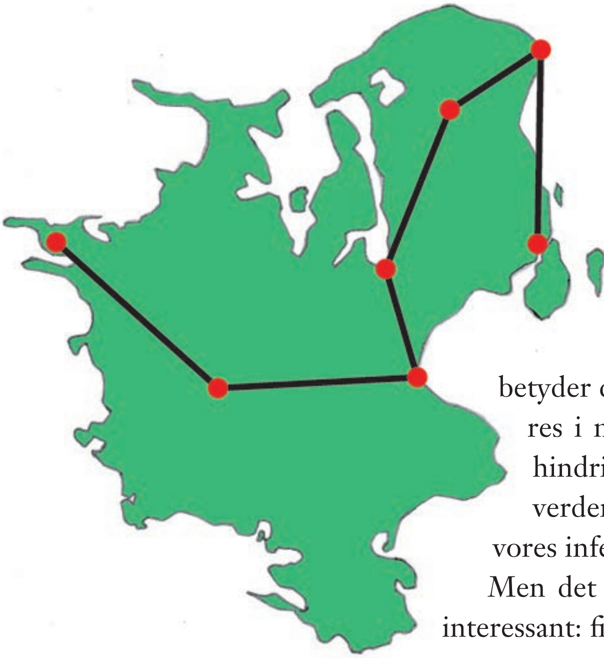
Hvad der til gengæld ikke blot er en teoretisk ide, men har stor konkret betydning for en masse ting i hverdagen, er de fysiske grænser for beregning. Gödel og Turing viste, at der findes formelle grænser for sikker viden. Men der ser ud til at være meget mere håndfaste grænser for, hvor svære opgaver man kan løse af den simple årsag, at de er for komplicerede, at verden er endelig og tiden knap.

Denne del af historien startede i 1960'erne, hvor matematikere begyndte at spekulere over måder, hvorpå man kan ordne matematiske opgaver i forhold til deres sværhedsgrad. Men hvordan definere sværhedsgrad? Forskerne enedes om at lade sværhedsgraden angive antallet af operationer eller regnetrin, man skal bruge for at komme frem til en løsning af et givent matematisk spørgsmål. Man kunne for eksempel spørge, om tallet $12 \cdot 2$ er nemmere at beregne end tallet 12^2, dvs. om disse regnestykker har forskellige sværhedsgrader. I dag ved man, at det at kvadrere er sværere end at fordoble. En fordobling af et vilkårligt tal med k antal cifre kræver, at man ganger hvert enkelt af de k cifre med to, dvs. antallet af regneskridt er ligefrem proportional med k. En kvadrering derimod kræver normalt, at man ganger hvert ciffer med hvert ciffer, og dermed kommer op på k^2 operationer (for slet ikke at nævne summationen bagefter). Men der findes også endnu sværere regnestykker, som kræver k^3 eller k^4 operationer, og jo sværere de bliver, jo længere tid vil de tage at beregne på en computer. De fleste problemer, man kender fra skolen, er af præcis den beskaffenhed: man kan beregne dem ved hjælp af k^r trin, hvor eksponenten r er et naturligt tal og k antallet af cifre på det tal, man begyndte med. Lægge sammen, gange, dividere, finde rødder, løse ligninger osv. – alle kan de løses med maksimalt k^r operationer (for forskellige værdier af r, vel at mærke). Og i de tilfælde siger man, at de er af polynomiel art eller "af typen P".

Faktisk findes der matematiske problemer af typen P, som stadig tiltrækker forskernes interesse. Blandt andet sorteringsalgoritmer. Alle kender det møjsommelige arbejde med at sortere adresselister, spillekort eller lignende efter en bestemt rangorden. Normalt ville man starte med f.eks. at lede efter den adresse i listen (med k adresser), som starter højest oppe i alfabetet. Til det kræves maksimalt k operationer, idet det jo ikke er sikkert, at man kan finde den rette adresse med det samme. Med den næste adresse kræves der maksimalt k-1 operationer, den næste igen k-2 osv. Det vil sige, at man kan komme op på $1+2+3+ \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}$ operationer, og da det tal kan sammenlignes med k^2 for store k, er sorteringsalgoritmen af typen k^2. Men sjovt nok kan man gøre det meget hurtigere og få eksponenten helt ned i nærheden af $r = 1$ takket være kloge hoveder og fiffige programmører.

Men der findes også problemer, som er meget mere krævende end dem af typen P. For eksempel opgaven: find et tal, som går op i 1.050.504.368.559.379, og det må ikke være tallet 1 eller tallet selv. Hvis man vil prøve lykken, må man regne med oddset én ud af 30 millioner, hvilket er en del sværere end at vinde i lotto. Det skyldes, at 1.050.504.368.559.379 kun er et produkt af to tal, nemlig primtallene 18.712.789 og 56.138.311, altså tal, som kun kan deles med sig selv og 1. Der findes ingen metoder, hvormed man konsistent kan løse den slags opgaver hurtigt, end ikke på computere, og gudskelov for det, da krypteringsteknikkernes sikkerhed på bl.a. internettet afhænger af det. Man kalder denne form for matematiske problemer for NP-problemer, hvilket står for "nondeterministic polynomial". Det skyldes, at man endnu ikke har fundet nogen effektiv deterministisk metode, hvormed man kunne løse dem på samme måde, som man kan løse problemer af typen P. Man kan kun gætte og være heldig eller også få et rigtigt surt arbejde. Men ikke desto mindre er de meget vigtige for en række praktiske problemer: hvordan finder man den optimale måde, hvormed industrimaskiner kan operere på et givent område? Hvordan koordineres hjemmeservice bedst? Eller den klassiske: hvordan bruger en handelsrejsende mindst mulig benzin, hvis han pendler mellem x antal forskellige byer? Alle disse problemer er NP-problemer, men måske er de i virkeligheden blot problemer af typen P, hvor man bare endnu ikke kender beregningsmetoden. Ingen kender svaret.

Ikke så få forskere ville give deres højre arm for at kunne svare på spørgsmålet om P = NP, det vil sige, om der findes NP-problemer, som kan reduceres til P, og som derfor kan løses uden brug af held. Afgørende i denne sammenhæng er, at mange NP-problemer er såkaldt "NP-komplette", hvilket betyder, at hvis man først har vist, at ét NP-komplet problem (som f.eks. den handelsrejsende) er af typen P, så er alle andre NP-problemer det også. Hvis ét problem er løst, så er alle de andre det også! Det skyldes, at alle den slags matematiske problemer af klassen NP kan omskrives til en kombination af logiske operatorer (som AND, OR, NOT osv.), og på den måde generaliseres til de såkaldte cookske problemer, der er opkaldt efter den amerikanske matematiker Stephen Cook (f. 1939), som fandt på metoden i 1971.



Det er ikke nemt at finde ud af hvilken rejserute, der er kortest, hvis man skal igennem en række byer. For bare syv byer er antallet af ruter lig $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$. For 67 byer ville hele universets regnekraft ikke række til at tjekke dem alle sammen.

Hvis et NP-komplet problem kan vises at være af typen P, så betyder det, at held alligevel kan undværes i matematikken, og at den eneste hindring for, at vi mennesker kan løse verdens værste matematiske gåder, er vores inferiøre intellekt.

Men det omvendte spørgsmål er lige så interessant: findes der NP-komplette problemer, som garanteret ikke er af typen P? I så tilfælde ville de filosofiske implikationer være mindst lige så betydningsfulde. Så ville vi endelig vide, at selvom der findes simple løsninger til svære gåder, kan de end ikke principielt findes ad rationel vej. Vi kan kun håbe på heldet. Fremtidens matematiske vil ikke længere være nødvendighed, men kompleksitet og tilfældighed, og troen på den grænseløse erkendelse vil gå tabt endnu engang. Men foreløbig er der ingen, som har bevist hverken det ene eller det andet, for selvom der findes et utal af NP-komplette problemer, har man ikke fundet nogen effektiv løsningsformel for et eneste af dem.

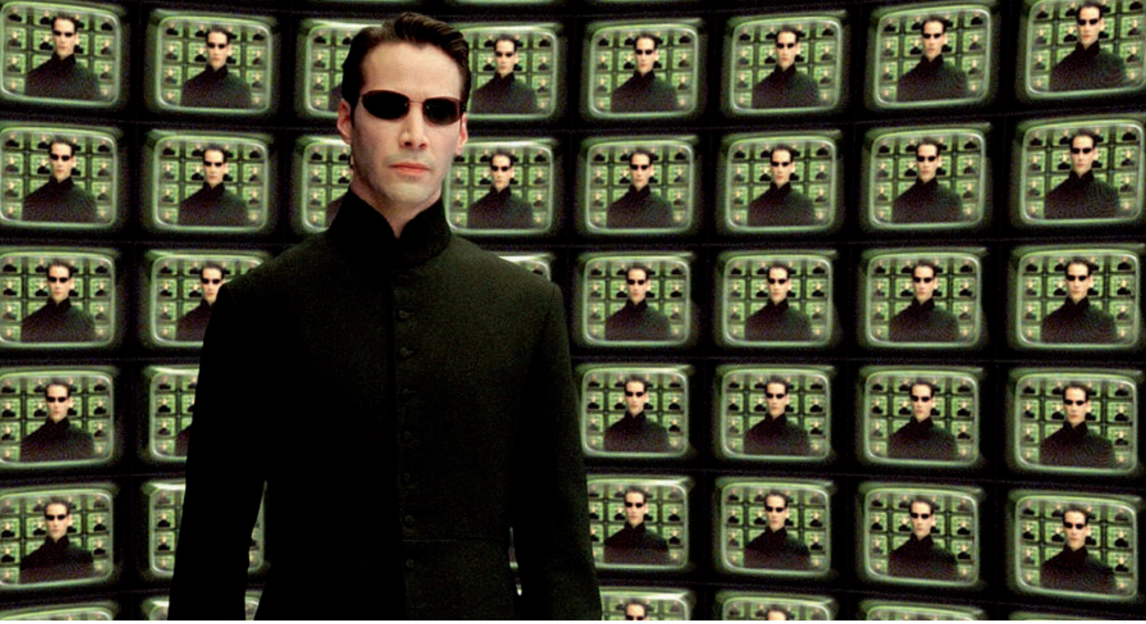
Universet som laptop

Man kan forsøge at komme med et estimat af, hvad man i det hele taget kan regne på, hvis hele universets masse og energi blev brugt til kun det formål. Vi kan med andre ord forestille os, at vi prøver at finde den optimale processorhastighed af hele universet. Til at starte med må vi kende massen af universet. Ifølge Big Bang-teoriens beregninger, som også medregner den del af universet, som ikke kan ses, er den totale masse af universet $6 \cdot 10^{52}$ kg. Massen kan så omregnes til universets totale energi via Einsteins formel $E = mc^2$. Men da vi er interesseret i antallet af bits, som universet kan beregne pr. sekund, må vi tage højde for kvanteeffekter, som kan ødelægge informationen. Derfor må man bruge Heisenbergs usikkerhedsrelation, der angiver en nedre grænse for produktion af en stabil bit pr. energi- og tidsenhed (hvilket er Plancks konstant h). Hokuspokus bliver det maksimale antal bits pr. sekund for universet til ca. 10^{100}. Et ettal med hundrede nuller, præcis dér, hvor moderne lommeregnere holder op med at fungere (tallet kaldes også en gogol, hvorfra navnet Google er taget).

Det var oprindeligt den tyske matematiker Hans-Joachim Bremermann (1926-96), som lavede den slags ad hoc beregninger i 1965. Hvis man forestillede sig, at hele jordklodens masse siden dens dannelse for 3,8 milliarder år siden var blevet brugt til at regne med, ville den ikke have nået mere end 10^{93} operationer, hvilket kaldes for Bremermanns grænse. Alle problemer, som kræver mere end 10^{93} regnetrin, er derfor "transberegnelige". De er hinsides klodens formåen. Det morsomme er, at der findes masser af praktiske problemer i dagligdagen, som kræver flere regnetrin end dette. For eksempel er testning af alle kombinationer på en integreret strømkreds med 308 input og et output langt mere omfattende, ligesom det er tilfældet med beregning af den optimale rute for ovennævnte handelsrejsende, når han skal igennem blot 67 byer.

Eksisterende computere er selvfølgelig langt under Bremermanns grænse, fordi de endnu ikke er designet til at udnytte atomare kvantetilstande for informationslagring og informationsoverførsel. Desuden er de begrænset af termodynamiske varmeprocesser. Men overslagsberegningen af universets regnekapacitet kan alligevel bruges til en række interessante konceptuelle og filosofiske overvejelser. F.eks. fortæller den, at universet ikke kan prædetermineres af nogen instans i universet selv, fordi der ikke kan være noget *i universet*, som kan beregne universet. Universet er måske deterministisk i den forstand, at fysikkens love sætter grænser for, hvordan materien udfolder sig i rum og tid, men der er ikke nogen mulighed for at opnå et forhåndskendskab til konsekvenserne af udfoldningen. Med andre ord: determinisme er ikke ensbetydende med forudsigelighed – en pointe, der vil blive behandlet yderligere om lidt, i forbindelse med selvorganiserende systemer, kaos og den ikke-lineære dynamik.

Nyere tids erfaringer med problemløsning, bevisførelse af teoremer, mønstergenkendelse, proteinfoldning, neurale netværk osv. peger alle i den samme retning: det er svære problemer. Der findes ikke nogen nem



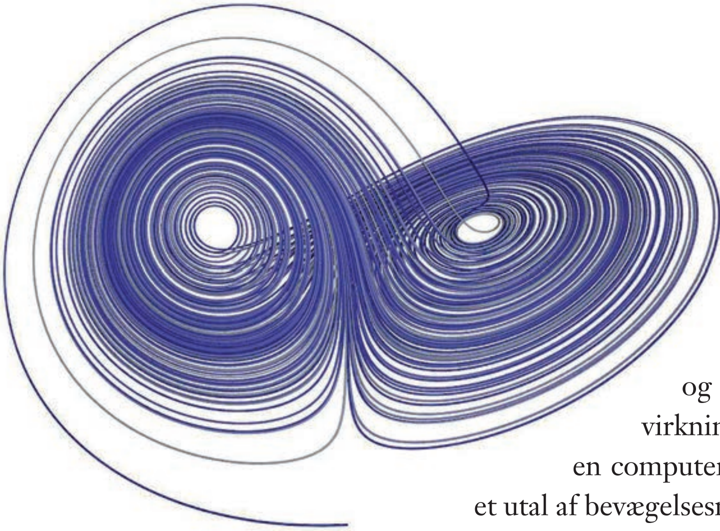
I science fiction-filmen *The Matrix – Reloaded* taler helten Neo med "Arkitekten"; den mand, som har bygget hele denne verdensomspændende simulation, der bliver kaldt The Matrix. Arkitektens eneste irritation er, at han ikke kan forudse konsekvenserne af menneskers frie viljer og valg. Og det er derfor, at der altid er nogle få mennesker, der vælger at bo i den underjordiske by Zion, der repræsenterer virkeligheden, som den i virkeligheden er. Men som vi har set, kan Arkitekten faktisk ikke engang forudse resultatet af en trafikprop, endsige en organismes udvikling og vej. Det er emergente egenskaber, komplekse strukturer, der opstår irreducibelt og derfor i detaljen uforudsigeligt. Det eneste, Arkitekten ville kunne gøre, er at manipulere med blændværk og udøve magt. Den perfekte Matrix er kun verden selv.

løsning, når naturvidenskaben bevæger sig uden for de snævert definerede opgaver og ind i komplekse sammenhænge, hvor mange elementer påvirker udfaldet. Frygten fra begyndelsen af 1900-tallet, hvor man troede, at den kolde, rationelle naturvidenskab ville blotlægge alle rester af naturens og menneskets adfærd, har derfor vist sig at være ubegrundet. Det ubeskriveligt enorme antal af muligheder i udfaldsrummet for atomare og molekylære tilstande kan nemlig ikke løses ved ren regnekraft. Det samme gælder for genetiske, emotionelle, psykologiske, sociale, organisatoriske, politiske og historiske tilstande. Hvis vi vil øge vores erkendelse om verden og om os selv, må vi derfor fortsat gribe til kvalitative smutveje, til sindrige ideer og fornuftens brogede effektivitet, sådan som man ikke kun kender dem fra de store naturvidenskabelige forskere, der får geniale ideer, men også fra humanvidenskaberne. Computeren vil være til stor hjælp, ingen tvivl om det, men når det kommer til de principielle spørgsmål, vil computeren blive ved med at være lige så langsom, som den er nu.

Kaos og ikke-lineære erkendelser

Sideløbende med disse erfaringer inden for matematik, fysik og datalogi opdagede en række kemikere, meteorologer og biologer lignende forhindringer i deres arbejde. Deres modeller opførte sig ikke pænt og deterministisk, som det sig hør og bør ifølge den klassiske mekanik, men var derimod knudrede, kaotiske og udviste en særdeles kompliceret dynamik. Fællesbetegnelsen for disse modeller er "ikke-lineære dynamiske systemer", og de blev først rigtig forstået og kortlagt med udviklingen af computeren, der med sin stadig voksende regnekraft kunne køre de koblede differentialligninger i modellerne ved gentagelse og simulation. Store makroskopiske naturfænomener langt fra ligevægt – såsom vejret, havstrømme, bjergformationer, galaksestrukturer, mønsterdannelse, populationsdynamik m.v. – lader sig ikke reducere til simple kausale sammenhænge, som man f.eks. kender det fra den klassiske naturvidenskabs bevægelsesmekanik. Der findes ikke nogen "løsning" som sådan. Her, i landet hvor kaos, fraktaler og turbulens regerer, er der tale om et helt netværk af kausalkæder, som binder alt til alt; det er et nærmest uigennemtrængeligt garnnøgle af årsagssammenhænge, hvor ethvert forsøg på at trække trådene ud med håndkraft på forhånd er dømt til at mislykkes. Man kan faktisk stadig skrive en slags formel ned for disse fænomener, men man er ikke særlig meget hjulpet ved det. Først udviklingen af formlen i tid og rum tillader en klassifikation af resultatet. Derved bliver de resulterende fænomener irreduktible i deres væsen. Det er måske derfor, de er så tiltalende og bredt anvendte som metaforer for liv og kunst.

Kun de mest simple mekaniske systemer kan beskrives på en sådan måde, at man kan forudsige deres fremtidige opførsel. Johannes Kepler (1571-1630) havde i 1609 beskrevet bevægelsesligningerne for et mekanisk system med to legemer. Senere havde Newton løst dem. For tre legemer viste det sig at være umuligt at løse. Den norsk-svenske konge Oscar II (1829-1907) udskrev derfor i 1887 en konkurrence om, hvorvidt man kunne afgøre, om solsystemet er stabilt eller ej – et vigtigt spørgsmål i betragtning af, at Månen ifølge Newton er i ustandseligt fald mod Jorden, mens Jorden er i ustandseligt fald mod Solen. I 1890 besvarede Henri Poincaré opgaven med en afhandling om trelegemeproblemet, hvori han kunne vise, at der i visse tilfælde findes stabile periodiske løsninger, hvilket fik ham til at konkludere, at solsystemet nok var stabilt alligevel. Årsagen til, at ikke-lineære mekaniske systemer med flere end to legemer er så uforudsigelige, er, at de er meget følsomme over



En kaotisk attraktor betyder, at to punkter i et dynamisk system forbliver nogenlunde tætte på hinanden, selvom de udfører kaotiske bevægelser. Her ses meteorologen Edward Lorenz' attraktor.

for startbetingelserne og over for tilfældige påvirkninger. Uden hjælp fra en computer regnede Poincaré på et utal af bevægelsesmønstre, nogle stabile, andre ustabile og på kollisionskurs og stadig andre øjensynligt stabile, men følgende ikke-periodiske baner. Over 70 år før deterministisk kaos blev kendt, havde Poincaré set konturerne af det.

Den første, som for alvor beskrev en såkaldt kaotisk attraktor, var den amerikanske meteorolog Edward Lorenz (f. 1947). En kaotisk attraktor betyder her, at to punkter, eller to elementer i systemet, forbliver nogenlunde tætte på hinanden, selvom de udfører kaotiske bevægelser. 1961 lavede Lorenz en meget simpel matematisk model til at simulere konvektionsstrømme i atmosfæren. Da han ville undersøge modellens opførsel over en længere tidsperiode, fandt han ud af, at små afvigelser i begyndelsesbetingelserne resulterede i store forskelle efter blot få gennemløb. "Sommerfugleeffekten" var blevet opdaget. Kendetegnende for Lorenz' attraktor er, at dens bevægelsesbaner holder sig i et begrænset udfaldsrum på trods af, at to tæt liggende punkter i faserummet fjerner sig fra hinanden, for hver gang simulationen køres. Tilfældige påvirkninger forstærkes eksponentielt, og resultatet er derfor uforudsigeligt, netop fordi man ikke kan kende begyndelsestilstanden helt nøjagtigt. Det er ligesom æltning af en kagedej: kommer man to vaniljekorn i dejen, f.eks. lige ved siden af hinanden i ydre højre hjørne, vil en fortsat systematisk æltning resultere i, at de to korn fjerner sig fra hinanden i uforudsigelige bevægelsesbaner, først langsomt, men senere i voldsomme spring.

På grund af kompleksiteten er kaotiske systemer uforudsigelige i det lange løb, selvom hvert enkelt trin i deres udvikling utvetydigt er determineret ud fra den tidligere situation. Det er derfor, man ikke bare taler om kaos, men om deterministisk kaos, idet determinisme og (u)forudsigelighed er to vidt forskellige ting. Ganske små forskelle kan være ansvarlige for udvælgelsen af helt andre udviklingsbaner. Det er derfor ofte kun muligt at belyse de kvalitative aspekter, det vil sige fænomenernes meget generelle karaktertræk, mens det er umuligt at forudsige det helt præcise udfald på et senere tidspunkt. Man kan kun lave forudsigelser for den meget nære fremtid. Det er f.eks. også derfor, at forudsigelser om klodens klima er ekstremt svære at lave. Vil der komme en ny istid? Hvordan vil drivhuseffekten påvirke Europas vejr? Hvornår og hvor kommer det næste jordskælv? Ingen kender svarene med sikkerhed.

Kendetegnende for ikke-lineære systemer er, at deres udfoldelse i tid og rum pludselig kan spaltes op i to eller flere mulige baner. Antallet af disse såkaldte "bifurkationer" kan stige så meget, at man til sidst har det rene kaos – et ragnarok, hvor ingen udviklingsbane er mere sandsynlig end den anden. Den russiske matematiker Andrey Kolmogorov (1903-87) kunne således i 1959 formulere endnu et entropi-begreb, som kvantificerer mængden af den manglende viden, vi har om de kaotiske udviklingsbaner. Igen er der her tale om en slags negativ bevisførelse: vi kan måske ikke vide, hvor systemet befinder sig i en bestemt fremtidig situation, men vi kan måle graden af informationstab for hvert enkelt trin. Og det er på mange måder lige så godt, fordi det kan bruges til at finde ud af, hvor meget information, der som minimum er tilbage, hvilket igen kan bruges til at sætte en øvre grænse for komprimeringen af data og til at finde det kortest mulige program, der kan genskabe disse data.

Modsat Shannons entropibegreb, som kun beskæftiger sig med et signals gennemsnitlige information, er Kolmogorovs entropi et mål for et individuelt objekts absolutte information. Også de amerikanske matematikere Ray Solomonoff (f. 1926) og Gregory Chaitin formulerede lignende "algoritmiske", dvs. mekanisk beregnelige, måleredskaber for kompleksiteten af data, hvorfor hele feltet i dag har flere navne, alt efter skole og behag: algoritmisk informationsteori, algoritmisk sandsynlighed og algoritmisk kompleksitet.

Naturens fraktale geometri

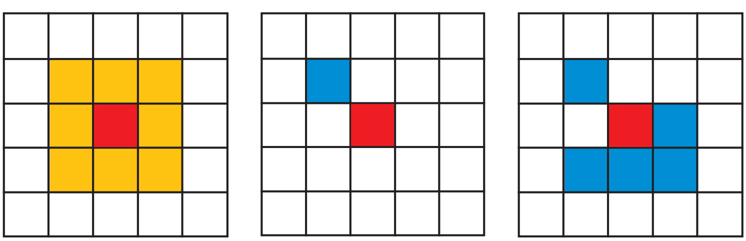
Kaotiske attraktorer har en fraktal natur. Ordet fraktal kommer af latin, hvor "frangere" og "fractum" betyder henholdsvis "at bryde" og "at være brudt op". Det blev opfundet af matematikeren Benoit Mandelbrot (f. 1924) i 1975, hvor han viste, at utrolig mange naturfænomener og objekter bedst

En fraktal med form som et bregneblad. Hvis man zoomer ind på et enkelt udsnit, vil man kunne se, at bladets geometriske form med små variationer gentages i det uendelige. Dette kaldes selv-similaritet og viser, at en fraktal kan generere uendelig komplekse geometriske figurer ud fra blot en enkel algoritme · Larry Bradley.

lader sig beskrive ved hjælp af en fraktal geometri. Kendetegnende for en fraktal er, at dens kant er uendelig ru og derfor uendelig lang, hvis man ville gøre sig det besvær at tage et uendelig fint målebånd og måle omkredsen. Den danske kyststrækning er derfor i princippet også uendelig lang – for hvis man kunne gå ned til det enkelte sandkorn og måle længden, ville der åbenbare sig sprækker og kløfter af alle størrelsesordener. Hvis man forstørrer en fraktal, vil man altid genfinde lignende strukturer. Fraktaler er derfor "selv-similære", og man har defineret deres dimension til at kunne være "brudt", dvs. eksempelvis 1,5 eller 0,7 i modsætning til f.eks. et stykke papir, der altid har den heltallige dimension 2.

Der er utrolig mange naturlige former og ikke-lineære systemer, som har en fraktal-lignende struktur, f.eks. skyer, bjerge, planter, galakser, vejr, lunger, blodkredsløbet, hjernen osv. Noget af deres fascinationskraft består formodentlig i, at man kan genfinde et billede af helheden i hver af dens dele.

John Horton Conways "Game of Life" giver nogle simple regler for, hvordan de enkelte celler i gitteret skal udvikle sig over tid. Resultatet kan være meget komplekse strukturer, som kan formere sig og bevæge sig hen over gitteret, alt efter hvilken startkonfiguration, man vælger.



Hver celle har 8 naboer (de gule celler), og kan være enten ubeboet eller beboet (den røde celle)

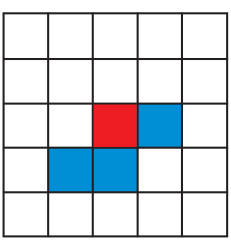
Hvis en beboet celle har 0 eller 1 nabo, dør den pga. ensomhed.

Hvis en beboet celle har 4 til 8 naboer, dør den pga. overbefolkning.

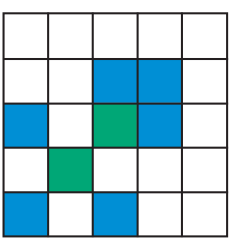
Men hvis naturen er fraktal og ikke-lineær, og hvis fraktaler og ikke-lineære systemer er noget, der har med udfoldelsen af et program i tid og rum at gøre, hvorfor kan man så ikke forestille sig, at hele universet er ét stort program? Og når det er tilfældet: må alle andre processer i universet så også forstås som programmer, der udfoldes i tid og rum? Ja, måske bestemmer programmet ligefrem tidens retning og rummets form? Kan man mon finde universets kildekode?

En lang række videnskabsmænd har spekuleret i den retning. Man har også forsøgt at udvikle nogle computerprogrammer, de såkaldte cellulære automater, der skal kunne simulere kompleksiteten af "universet" ud fra nogle meget simple programmer. Cellulære automater er diskrete dynamiske systemer, hvis opførsel udelukkende er defineret af lokale regler. Deres udfoldelsesrum er repræsenteret ved et skakbrætlignende gitter, hvor hver celle i gitteret indeholder nogle data, der kan skifte tilstand, alt efter hvilken tilstand nabocellerne er i. Reglerne for cellernes opførsel kan slås op i en lille tabel, hvorudfra computeren beregner de nye tilstande for hvert nyt tidstrin. Systemets regler er derfor meget simple, ensartede og lokale. På trods af det kan cellulære automater udvise ekstremt komplicerede mønstre, inklusive kaotiske attraktorer, såkaldte grænsecykler og fraktal selv-similaritet. Deres opførsel er irreversibel og uforudsigelig og kan i visse tilfælde minde om levende systemers udvikling, som det f.eks. er blevet foreslået i forbindelse med matematikeren John Horton Conways (f. 1937) "Game of Life" fra 1970.

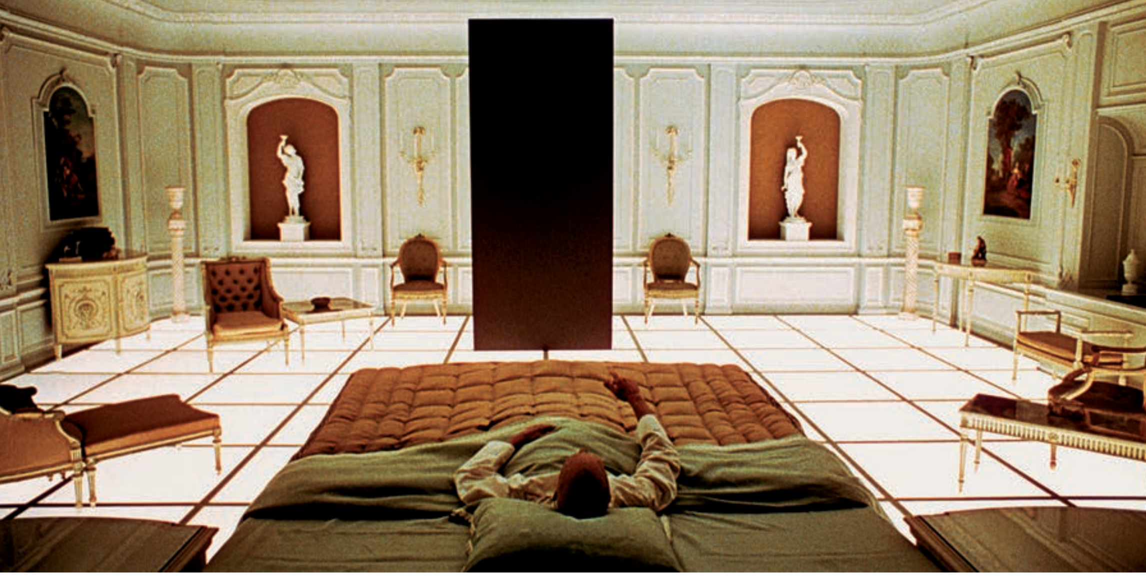
Den første cellulære automat blev udtænkt af den polske matematiker Stanislav Ulam (1909-84) sent i 1940'erne. Men det blev især Ulams kollega, ungareren John von Neumann (1903-57), der arbejdede videre med ideerne. Von Neumann var klar over, at der findes en tæt forbindelse mellem cellulære automater og Gödels og Turings arbejder, fordi de havde vist, at den formelle logik kan repræsenteres som rekursive algoritmer, der kan beregnes af en Turingmaskine. Og når det er tilfældet, kan den matematiske logik analyseres via cellulære automater.



Hvis en beboet celle har 2 eller 3 naboer, overlever den til den næste generation.



Hvis en ubeboet celle har 3 naboer, sker der en "fødsel", og den bliver beboet.



Baseret på Alan Turings ideer arbejdede John von Neumann også med at bygge en selv-reproducerende maskine, som han kaldte for en “kinematon”. Den skulle have den fantastiske egenskab at kunne reproducere en hvilken som helst maskine, der kan beskrives ved et program – således skulle den også kunne bygge en kopi af sig selv. Ideen blev blandt andet brugt af Stanley Kubrick (1928-99) i filmen *2001 – A Space Odyssey*. De sorte monolitter begynder at dukke op flere forskellige steder i løbet af filmen og reproducerer øjensynligt sig selv, indtil det viser sig, at deres eksponentielle vækstrate til sidst tillader dem at transformere Jupiter til en ny stjerne. Scenen, der skulle forklare sammenhængen med von Neumanns kinematon, blev dog klippet ud af den færdige film.

Mange mennesker var (og er) skeptiske over for, om man nogensinde vil kunne bygge en maskine, der kan gøre nærmest hvad som helst, inklusive at tænke ligesom mennesket. Von Neumanns svar på denne skepsis var typisk følgende: “Du insisterer på, at der findes noget, som en maskine ikke kan gøre. Hvis du fortæller mig helt præcist, hvad det er, en maskine ikke kan gøre, så vil jeg kunne lave en maskine, som kan netop det!” Pointen er med andre ord, at hovedårsagen til at vores maskiner stadig er så dårlige til at udføre bestemte ting, er at vi stadig ikke forstår disse ting i detaljer. Det kan, som vi har set, også skyldes, at maskinerne ikke kan gennemføre opgaven i et endeligt antal trin. Men at bruge Gödels ufuldstændighedsteorem, ubestemmelighed, Turingmaskiner som aldrig stopper osv. hjælper ikke rigtigt, fordi den menneskelige hjerne eksisterer – og den tænker jo faktisk.

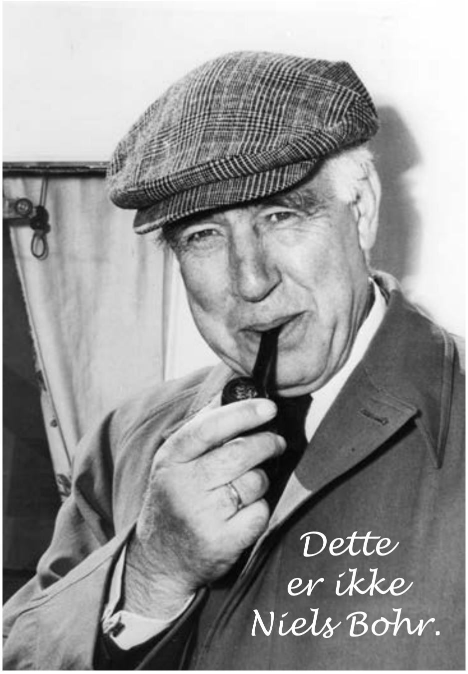
Von Neumann vidste, at den menneskelige hjerne opererer i en situation af manglende viden og fejlfinding. Derfor måtte hans maskiner også operere med ufuldstændig information og fejl. Men da den matematiske logik på daværende tidspunkt hverken accepterede støj eller gråzoner og kun beskæftigede sig med deterministiske operationer i en idealiseret ja/nej verden, var det svært at inkludere muligheden for fejlfunktioner i komponenterne. Von Neumann arbejdede længe på at udvikle en probabilistisk logik til at understøtte kontinuerte cellulære automater for selv-reproduktion, men nåede aldrig særlig langt. Igen var det Alan Turing, der var den første, som udviklede en selv-reproducerende model for biologisk mønsterdannelse. Den vil blive beskrevet i kapitel ni.

De cellulære automater har bidraget til at skifte ud i de metaforer, som fysikere typisk bruger til at anskueliggøre universets udvikling med. I dag betragter mange universet som "en fortsat beregning", hvilket er noget ganske andet end at betragte universet som noget, der følger en lov på en formel, og som derfor kan beregnes og måske endda forudsiges. Men de cellulære automater viser, at forudsigelser beror på evnen til at finde en smutvej til det beregningsmæssige arbejde, som systemet selv udfører. Det kan lade sig gøre for meget simple mekaniske systemer, men ikke for komplekse sammenhænge – ikke engang for blot tre lige store legemer, der kredser om hinanden i et tyngdefelt.

Den statistiske vending

Som nævnt i starten af kapitlet, blev troen på et deterministisk verdensbillede i begyndelsen af 1900-tallet ledsaget af mange pessimistiske forudsigelser for menneskeheden. Civilisationens undergang og varmedød var de dystre perspektiver. Men mellem 1920 og 1960, hvor den ene grundantagelse efter den anden opløstes i lyset fra de nye erkendelser, blev den ofte ledsaget af en mere optimistisk begejstring. At man kunne bevise nogle teorier og kende nogle love, var interessant. Men at man kunne bevise, at noget var ubeviseligt, og at man kunne vide, at der var nogle ting, som man ikke kunne vide noget om, det var højst bemærkelsesværdigt.

Således udvikledes et helt nyt koncept for forståelsen af naturen. Dette var det føromtalte koncept om information. En vigtig idehistorisk pointe i udviklingen af informationskonceptet, og alle de dertil hørende teorier i 1900-tallet, lå i, at man umærkeligt havde omdefineret ordet "tilfældighed" fra at være noget naturgivent, til at betyde "manglende viden". Ordet tilfældighed har med andre ord ikke længere en ontologisk status, hvor "Gud spiller terninger", men betegner en begrænsning ved vores viden og vores evne til at forudsige ting.



Bohr insisterede på, at ethvert forsøg på at måle naturen involverer en repræsentation og et repræsentations-apparat (forsøgsopstillingen). Begge sætter visse begrænsninger for vores muligheder for at forstå alle virkelighedens niveauer, og de må i hvert fald forsøges medregnet i vores ligninger. Ligesom Magritte fastholdt Bohr altså det epistemologiske problem, der opstår, når man slutter sig fra et billede af en person, af en pibe eller af en elektron, til selve personen, piben og elektronen · Niels Bohr Arkivet, København.

Og i den forstand har det måske vist sig, at Einstein og Bohr talte om to forskellige ting. For når Einstein sagde, at Gud ikke spiller med terninger, så mente han, at der måtte findes nogle underliggende regelmæssigheder for, hvordan naturen opfører sig. Og det er så naturvidenskabens pligt at forsøge at finde disse regelmæssigheder, om det så skal formuleres i form af love eller teorier. Til gengæld insisterede Bohr på, at enhver forsøgsopstilling, som vil aflure naturens hemmeligheder, er en uadskillelig del af naturen selv, og at opstillingen – inklusive observatøren – må medregnes i ligningerne. Bohr bibeholdt således et epistemologisk perspektiv (der forholder sig til, hvad vi kan vide om verden), mens Einstein bibeholdt et ontologisk perspektiv (der forholder sig til selve verden).

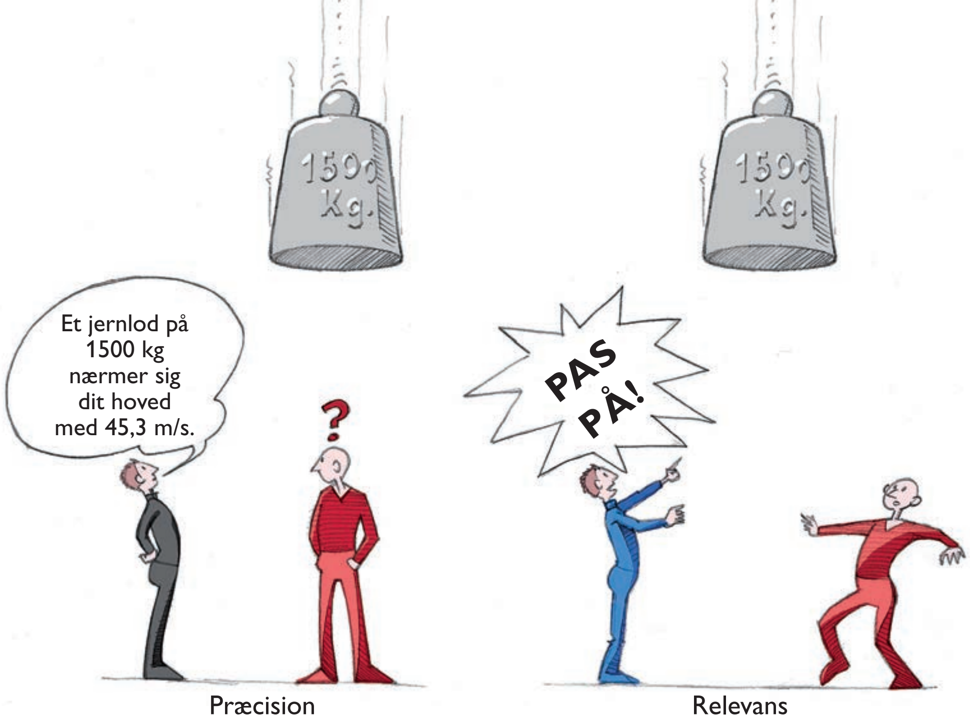
Man kan sige, at den epistemologiske tilgang har vundet mere indflydelse i den moderne naturvidenskab. Men et epistemologisk perspektiv bliver nødt til at arbejde med sandsynlighedsbetragtninger, idet manglende viden og ufuldstændighed kun kan kvalificeres og kvantificeres ved hjælp af statistiske metoder. En anden konsekvens af det epistemologiske perspektiv er, at den matematiske logik, sådan som den blev udviklet af især Frege og Russell, må udvides (og måske endda udskiftes) med en probabilistisk, dvs. sandsynlighedsorienteret, variant. De deduktive og induktive følgeslutninger i den klassiske logik arbejder altid med de dualistiske kategorier sandt og falsk, ja og nej, 0 og 1. Men hvordan kan man håndtere en situation, hvor vores viden ikke rækker til at afgøre, om et udsagn er sandt eller falsk, 0 eller 1?

Fuzzy tænkning

Én måde at angribe sagen på er at udvikle en logik, der direkte kan håndtere et "måske" – en gråzone, hvor både ja og nej, god og dårligt, sandt og falsk har en vis ret. Denne metode blev introduceret under navnet *fuzzy logic* af den azerbaidjanskfødte ingeniør Lotfi Zadeh (f. 1921) i 1965, men blev faktisk allerede undersøgt af de polske logikere Jan Lukasiewicz (1878-1956) og Alfred Tarski (1902-83) i 1920'erne og 30'erne. I dag bliver fuzzy logic flittigt brugt i maskiner, som skal kunne reagere "klogt" på input fra omverdenen, og som derfor skal kunne håndtere modsigelsesfyldte data. En dansk virksomhed, F.L. Smidth, var faktisk det første firma i verden, som brugte fuzzy logic til at regulere tilførslen af brændsel og ilt i cementovne.

Her et eksempel på, hvad fuzzy logic kan gøre: for at finde ud af hvor lang tid en vaskemaskine skal vaske en vis mængde tøj, skal den kunne afgøre, hvor snavset og hvor fedtet tøjet er. Fuzzy logic giver hver tøjgenstand en vægtning af snavsethed og fedtethed (på en skala med f.eks. tre intervaller: "lidt urent", "snavset" og "meget beskidt"), således at mængden af sæbe og vasketid kan justeres tilsvarende. Fuzzy logic giver med andre ord en mekanisk procedure til at konstruere beslutningsregler ud fra komplekse data. Forskning i kunstige neurale netværk har været et oplagt sted til at bruge fuzzy logic, men også inden for lægevidenskaben har metoden fået en vis opmærksomhed, idet den kan bruges til bedre at individualisere patientbehandling og medicinering.

Fuzzy logic er i modstrid med den klassiske aristoteliske logiks princip om bivalens (tidligere omtalt som det ækvivalente "udelukkede tredjes princip", *tertium non datur*), der siger, at ethvert logisk udsagn enten skal være sandt eller falsk. Det kan ikke være begge dele eller noget midt imellem. Denne filosofiske position tillægges typisk grækeren Parmenides (ca. 525-450 f.v.t.), som sagde, at "alt må enten være eller ikke være". Aristoteles forsvarede Parmenides' position i sin kritik af Heraklit (ca. 540-480 f.v.t.), og siden da har dette bivalente princip været almen visdom i vestlig filosofi. Men som vi har set, findes der øjensynligt mange gråzoner, hvor der gælder et "både og", og der findes naturlige paradokser, hvor det modsatte af en sandhed kan være en anden sandhed. Der findes ikke-lineære systemer og fraktaler, hvor det ubeviselige er beviseligt, hvor det kaotiske er stabilt, og hvor helheden kan genfindes i dets dele. Fuzzy logic, sådan som den er blevet videreudviklet af blandt andet amerikaneren Bart Kosko (f. 1960) i 1990'erne, er i stand til at



Med fuzzy logic forsøger man bl.a. at skelne intelligent mellem præcision og relevans. Det er ikke i alle situationer nødvendigt at modtage alle tilgængelige data.

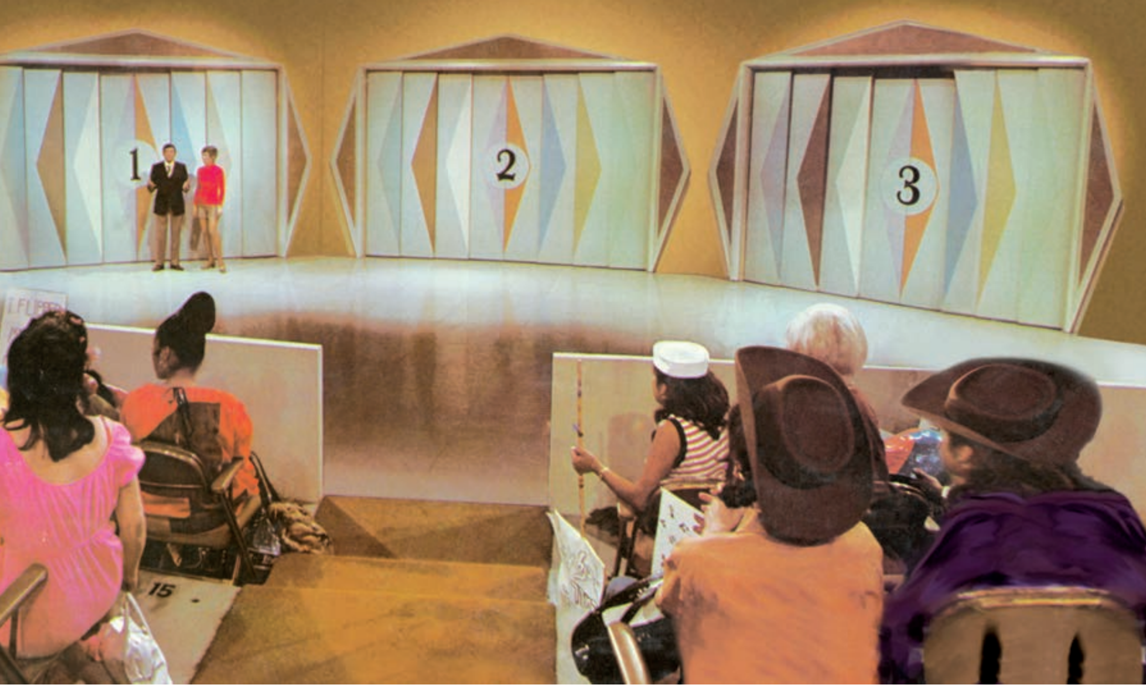
acceptere nogle af disse forhold, fordi den er multi-valent og vag i sin afgrænsning af objekter og mængder. Det skal siges, at fuzzy logic stadig er en relativ ukonventionel genre, der indtil videre kun har fundet rodfæste i ingeniørvidenskaberne. Bart Kosko mener dog, at fuzzy logic er begyndelsen til en helt ny tilgang til logikken, baseret på uvished, snarere end vished. Han viser f.eks., hvordan fuzzy logic kan løse et af de store paradokser i klassisk logik – det tidligere omtalte barber-paradoks. Kosko mener, at hvis man kommer frem til en konklusion om, at barberen både barberer sig selv og ikke barberer sig selv, så må begge positioner have lige stor sandhedsværdi – med andre ord må det være lige rigtigt, at han både barberer sig og ikke barberer sig. Det minder lidt om de "mystiske" elementer i østlig filosofi, hvor paradokser bruges flittigt til at skabe en kompleks forståelse af verden. Når der i den kinesiske visdomsbog *Dao De Jing* (6. årh. f.v.t.) f.eks. står, at når det smukke anerkendes som smukt, indeholder det allerede det grimme, eller når Heraklit mener, at begrebet varmt allerede indeholder tanken om noget koldt, så betyder det også, at en sandhedsdom altid kun er meningsgivende i forhold til sin modsætning, hvilket også forhindrer eksistensen af absolutte sandheder som andet end sproglige kategorier.

Betingede sandheder

En anden og også relativ ukonventionel tilgang til at udvide gængs logisk tænkning med en moderne probabilistisk variant kan man finde i den bayesianske sandsynlighedsteori (efter Thomas Bayes, 1702-61). Her en kort introduktion: når man har nok information om et bestemt problem, kan man som regel bruge almindelig deduktion og udlede sine resultater ud fra nogle generelle sammenhænge og love. Men meget ofte mangler man tilstrækkelig information, og så kræver det snarere en slags induktiv tænkning, der med fordel kan benytte sig af bayesianske følgeslutninger. De bruger ligesom fuzzy logic slørede gråzoner mellem ja og nej, dog via en fundamentalt anden tilgang. En bayesiansk følgeslutning starter med nogle plausibilitetsovervejelser, dvs. et godt gæt, hvorefter sandsynlighedsvægtene justeres, alt efter hvilken yderligere information man får ud af systemet efterhånden. Den arbejder sig med andre ord iterativt tættere og tættere ind på den mest sandsynlige forklaring ud fra givne data.

Forestil dig, at du skal købe to julegaver for at glæde din kollegas to børn. Mens du leder efter nogle gode ting i legetøjsbutikken, kommer du i tanke om, at du ikke kan huske, om de to børn begge er drenge, eller om de er en dreng og en pige. En pinlig situation. Spørgsmålet er derfor: vil du købe to drengegaver eller vil du købe en drenge- og en pigegave?

Hvad er sandsynlighederne for at ramme rigtigt? Selv matematisk trænede mennesker har ofte problemer med svaret. Måske tænker man, at fødslen af børn er statistisk uafhængige hændelser, og at det derfor er ligegyldigt at vide, om det ene barn er en dreng, dvs. at sandsynligheden for at få en dreng til er (mere eller mindre) 50 procent og dermed basta. Men det er forkert. Spørgsmålet var betinget af, at der var to børn, og at det ene var en dreng. For at finde det rigtige svar må man adskille sin viden om apriori sandsynligheder (et plausibelt gæt om at en dreng bliver født ca. hver anden gang) med de betingede sandsynligheder, der er situations- og vidensafhængige. For at følge ræsonnementet skal man spørge sig selv om følgende ting: 1) hvad er apriori sandsynligheden for, at et ægtepar med to børn har to drenge? Svar: 0,25 eller 25 procent. 2) Hvad er sandsynligheden for, at ét af dem er en dreng? Svar: 0,75 eller 75 procent, fordi de fire muligheder er dreng-dreng, dreng-pige, pige-dreng og pige-pige (idet vi ikke ved, hvem af børnene er en dreng, og hvem en pige, er dreng-pige og pige-dreng to forskellige situationer). For at få det rigtige svar på det oprindelige spørgsmål



Der er mange eksempler på øjensynlige paradokser, som kun trænede eksperter kan gennemskue. Blandt de mere berømte er det såkaldte Monty Hall-problem. Navnet stammer fra det amerikanske quiz-show *Let's make a deal* fra midten af 1960'erne, hvor studieværten Monty Hall stiller deltageren over for følgende afsluttende problem: bag én af tre døre står der en Cadillac, fri til afhentning, mens der bag de to andre står en sur ged. Udfordringen er så at vælge den rigtige dør og vinde Cadillacen. Efter at deltageren har gættet på f.eks. dør nummer ét, åbner Monty Hall en af de andre to døre. Han sørger altid for at åbne for en ged – og derefter spørger han: "Vil du vælge om?" Ja, ville du vælge om? Du har endnu ikke set indholdet af din først valgte dør. Det må være klart, at du oprindeligt havde en tredjedel chance for at vinde bilen, og at den nu er steget (til 50 procent?), idet Monty Hall har udelukket en af dørene. Men skulle det hjælpe at vælge den anden dør nu? Svaret er, at det er en rigtig god ide at vælge om. Faktisk øges sandsynligheden til det dobbelte, og for at finde svaret (at man nu har 2/3 sandsynlighed for at vinde Cadillacen) må man ræsonnere på en lignende måde som i eksemplet med drenge- og pigegaven · Hatos-Hall Productions, Los Angeles.

må man derfor dividere 0,25 med 0,75, hvilket giver 0,333... Man skal altså (statistisk set) købe en drengegave og en pigegave.

Det var oprindeligt den engelske præst Thomas Bayes, der i midten af 1700-tallet formulerede de sandsynlighedsteoretiske rammer og teoremer til grund for den slags analyser. Men til trods for flere hundrede års kendskab til dem, er betingede sandsynligheder stadig notorisk svære at kapere og basis for mange diskussioner. Den bayesianske sandsynlighedsteori er blevet videreudviklet af folk som bl.a. de to amerikanske statistikere Richard T. Cox (1898-1991) og Edwin T. Jaynes (1922-98) mellem 1970 og 2000 og har haft en stor afklarende virkning for en lang række moderne fortolkninger af fysiske og matematiske teorier om verden, hvor observatørens manglende viden spiller en rolle.

Jaynes formåede f.eks. at skabe en direkte fysisk forbindelse mellem Shannons information og sandsynlighedsteoretiske problemer. Hvis Shannon-entropien angiver den mængde af viden, som vi har om et givent sæt data, så kan den også tolkes omvendt, nemlig som den viden, der "skævvrider" vores totale uvidenhed. Det kan lyde skørt, men kan bruges til at luge ud i de ofte hjemmelavede sandsynlighedsfordelinger over fysiske processer, hvor forskeren har svært ved at adskille viden og uvidenhed. Denne fremgangsmåde, som er blevet kaldt princippet om maksimal entropi, er siden blevet brugt med stor effekt inden for fysisk modellering og også inden for kvantemekanikken.

Denne og andre bayesianske fortolkninger har bidraget væsentligt til at forstå adskillelsen mellem to meget forskellige beskrivelsesniveauer i naturvidenskabens moderne idehistorie: det ene (ontologiske) niveau handler om at beskrive, hvordan verden virker, ligesom Galilei, Newton og Einstein gjorde det med deres teorier. Det andet (epistemologiske) niveau handler om at beskrive, hvad vi kan vide om verden, ligesom Boltzmann, Bohr og Gödel gjorde med deres teorier. De har brug for hver deres metoder og begreber. Mens informations-tænkningen langsomt er ved at erstatte energitænkningen, er den klassiske logik langsomt ved at blive udvidet til en probabilistisk logik.

Dog er vores forståelse af konceptet "information" i dag sandsynligvis på samme niveau, som Galileis forståelse af temperatur var for 400 år siden, dvs. ret ringe. Vi kan tælle informationsmængder, måle transmissionskapaciteter og beregne sandsynligheder, men vi ved ikke, hvordan alt dette relaterer sig til et betydningsindhold, til dannelsen af mening. Der er blevet gjort en lang række betydningsfulde fremskridt i løbet af de sidste årtier, f.eks. ved brugen af et informationsbegreb, som den britiske biostatistiker Ronald Fisher (1890-1962) havde udviklet allerede i 1925, eller i den svenske ingeniør Jan Kåhres (f. 1940) teorem om "den aftagende informations lov" fra 2002. I dette teorem slår Kåhre fast, at der findes et fundamentalt asymmetrisk element i enhver informationsoverførsel, lidt ligesom i den kinesiske hviskeleg, hvor man sidder i en rundkreds og hvisker et budskab i øret på den næste, indtil man er nået hele vejen rundt. Legen viser, at den oprindelige information kan hviske sig vej til radikalt andre betydninger eller helt miste sin betydning. Kåhres arbejde er måske begyndelsen på en teori om informationens indholdsbetydning, hvilket er i stærk kontrast til Shannons klassiske teori, der tæller bits og måler transmissionskapaciteter.